

Capitolo I

Cenni di Teoria delle reti

Indice

Grandezze e abbreviazioni	2
La legge di Ohm	4
I componenti passivi	5
I generatori di tensione e di corrente	6
La funzione di trasferimento	12
Le Leggi di Kirchhoff	13
Configurazioni parallelo e serie	18
L'impedenza tra due nodi	23
I teoremi di Thevenin e di Norton	26
Il principio di sovrapposizione degli effetti	31
La trasformata di Laplace e la risposta in transitorio	41
I diagrammi di Bode	47

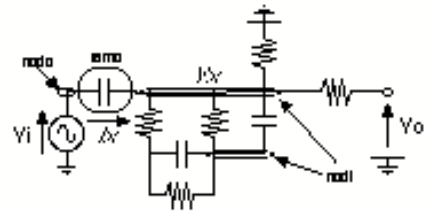
Grandezze: V e I

Le grandezze che caratterizzano l'elettrotecnica e l'elettronica sono:

- la corrente (si misura in Ampere [A])
- la tensione (si misura in Volt [V])

Data una qualsiasi rete elettrica, in essa possono essere riconosciuti i nodi e i rami

- Un nodo e' il punto di contatto tra due o piu' componenti
- Un ramo e' il segmento che unisce due nodi (bipolo elettrico)



- Ogni nodo e' caratterizzato da una tensione (verso massa)
- Ogni ramo e' caratterizzato da una corrente che lo attraversa e da una tensione ai suoi capi
- Di ogni tensione e corrente si deve definire un modulo ed un verso

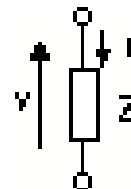
Abbreviazioni

Abbreviazione	Significato
G	10^9
M	10^6
k	10^3
m	10^{-3}
μ	10^{-6}
n	10^{-9}
p	10^{-12}

La legge di Ohm

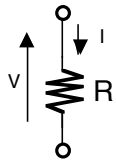
Dato un bipolo (ramo) passivo di impedenza Z, la relazione tra la tensione applicata ai suoi capi (V) e la corrente che lo attraversa (I) e' data da:

$$V = Z \cdot I$$



I componenti passivi

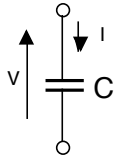
Resistore



$$V = R \cdot I$$

$$[R] = \Omega \text{ (Ohm)}$$

Condensatore



$$I = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$[C] = F \text{ (Farad)}$$

Induttore



$$V = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

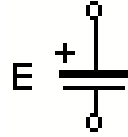
$$[L] = H \text{ (Henry)}$$

- Per condensatori ed induttori, le relazioni V-I sono integrali e differenziali e, quindi, sono difficili da maneggiare (soprattutto quando si hanno diversi componenti in uno stesso circuito)

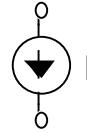
I generatori di tensione e di corrente

Generatori indipendenti

Generatori in continua (Polarizzazione)



Generatore di Tensione

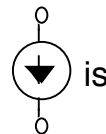


Generatore di Corrente

Generatori di segnale



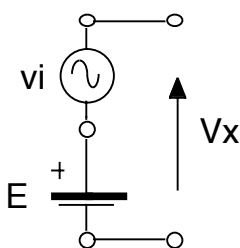
Generatore di Tensione



Generatore di Corrente

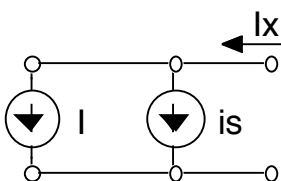
Composizione di generatori

- I generatori di tensione si sommano in serie



$$V_x = E + V_i$$

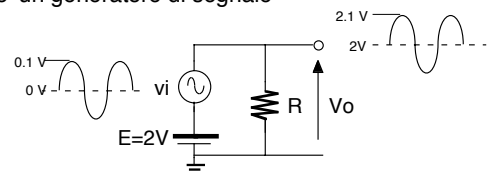
- I generatori di corrente si sommano in parallelo



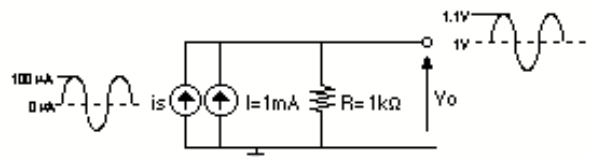
$$I_x = I + i_s$$

Generatori di polarizzazione Generatori di segnale

- E e' un generatore di polarizzazione
 v_i e' un generatore di segnale

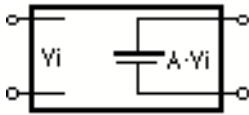


- I e' un generatore di polarizzazione
 i_s e' un generatore di segnale



- Per le applicazioni elettroniche, l'informazione da elaborare e' nel segnale.
- Tuttavia i componenti elettronici (transistor) per poter elaborare il segnale gli devono sovrapporre una tensione continua (di polarizzazione) per poter operare correttamente

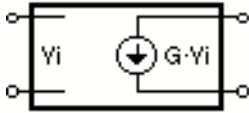
Generatori dipendenti



Generatore di tensione
comandato in tensione

Guadagno di tensione A
(adimensionale)

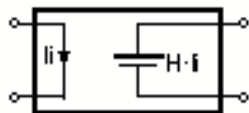
$$V_o = A \cdot V_i$$



Generatore di corrente
comandato in tensione

Guadagno di trans-
conduttanza G (Ω^{-1})

$$I_o = G \cdot V_i$$



Generatore di tensione
comandato in corrente

Guadagno di transresistenza
H (Ω)

$$V_o = H \cdot I_i$$



Generatore di corrente
comandato in corrente

Guadagno di corrente F
(adimensionale)

$$I_o = F \cdot I_i$$

Stimoli sinusoidali

La relazione V-I per condensatori ed induttori dipende dall'evoluzione temporale della tensione/corrente applicata.

Un segnale tipicamente usato è lo stimolo sinusoidale. Ad esempio una tensione $V(t)$ si scrive:

$$V(t) = (V_s \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

Se tale tensione viene applicata come stimolo ad un condensatore la relazione tensione-corrente diventa:



$$I = C \cdot \frac{dV(t)}{dt} = C \cdot \frac{d(V_s \cdot \sin(\omega \cdot t))}{dt} = C \cdot \omega \cdot V_s \cdot \cos(\omega \cdot t) =$$

$$I = C \cdot j \cdot \omega \cdot V_s \cdot \sin(\omega \cdot t) = j \cdot \omega \cdot C \cdot V$$

Quindi:

$$I = j \cdot \omega \cdot C \cdot V$$

Si ottiene una relazione lineare tra tensione applicata e corrente che scorre nel ramo.

Analogamente si può vedere che la relazione per l'induttore diventa:

$$V = j \cdot \omega \cdot L \cdot I$$

L'assunzione di stimolo sinusoidale riporta un problema integro/differenziale ad un problema lineare

Tramite la teoria della trasformata di Fourier è possibile dimostrare che qualsiasi stimolo tipicamente usato in elettronica può essere ricondotto ad una sovrapposizione di stimoli sinusoidali

Comportamento in frequenza

La relazione V-I del condensatore ($I = j \cdot \omega \cdot C \cdot V$) indica che per una tensione applicata (V), la risultante corrente dipende anche dalla frequenza (ω) della tensione applicata.

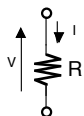
Ad esempio sempre per il caso del condensatore:

- per frequenza $\omega=0$, $I=0$ indipendentemente dall'ampiezza V_s dello stimolo applicato (cioè si comporta da circuito aperto).
- per frequenza $\omega \rightarrow \infty$, $I \rightarrow \infty$, anche per stimoli piccolissimi (cioè si comporta da corto-circuito).

Per l'induttore vale la situazione complementare ($V = j \cdot \omega \cdot L \cdot I$)

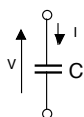
Per comodità di calcolo si sostituisce $j \cdot \omega$, con s ($=j \cdot \omega$), per cui risultano:

Resistore



$$V = R \cdot I$$

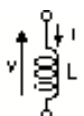
Condensatore



$$I = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$I = s \cdot C \cdot V$$

Induttore

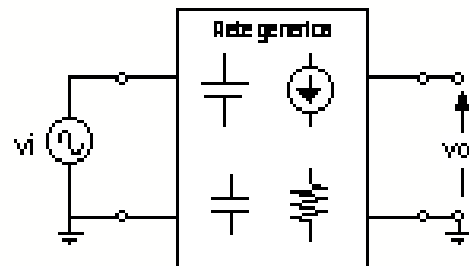


$$V = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$V = s \cdot L \cdot I$$

La funzione di trasferimento

Data una certa rete *LINEARE* (composta da tutti componenti con comportamento lineare) con un nodo di ingresso ed uno di uscita, si definisce come funzione di trasferimento il rapporto (nel dominio s) della tensione (corrente) di uscita rispetto alla tensione (corrente) di ingresso



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- In realtà non si considera il tipo di segnale applicato, in quanto è importante sapere come questo segnale (comunque esso sia) viene trasferito all'uscita. (essendo la rete lineare il guadagno non dipende dal tipo di segnale applicato).

- Nel caso dello schema in figura il segnale di ingresso è una tensione (v_i) come lo è anche il segnale di uscita (v_o). In pratica è possibile avere stadi in cui i due segnali (ingresso e uscita) sono correnti o tensioni.

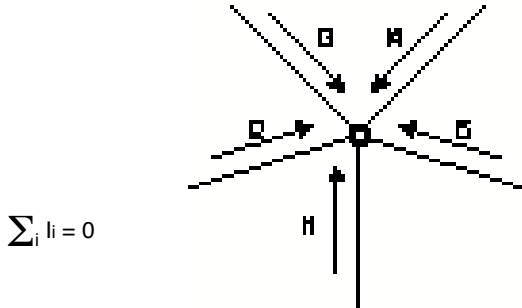
Le Leggi di Kirchhoff

Come si calcola la funzione di trasferimento di una rete lineare?

Si usano la legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff

Legge di Kirchhoff delle correnti

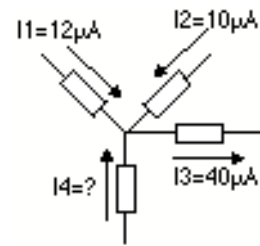
- Sia dato un nodo con n rami collegati a tal nodo, e siano i_i le correnti entranti in quel nodo dal ramo i -esimo, allora vale la relazione:



- CIOE':**

*Tante persone entrano in una stanza,
altrettante ne escono*

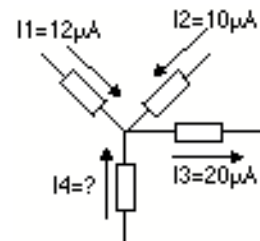
Esempio



$$i_4 + i_1 + i_2 = i_3$$

$$i_4 = i_3 - (i_1 + i_2) = 18 \mu A$$

Esempio

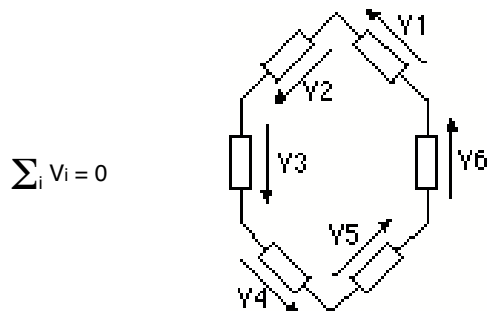


$$i_4 + i_1 + i_2 = i_3$$

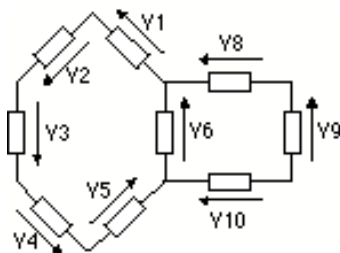
$$i_4 = i_3 - (i_1 + i_2) = -2 \mu A$$

Legge di Kirchhoff delle tensioni

- Sia data una maglia composta da n rami, e sia V_i la tensione sul ramo i -esimo, allora vale la relazione:



- Vale anche per la rete

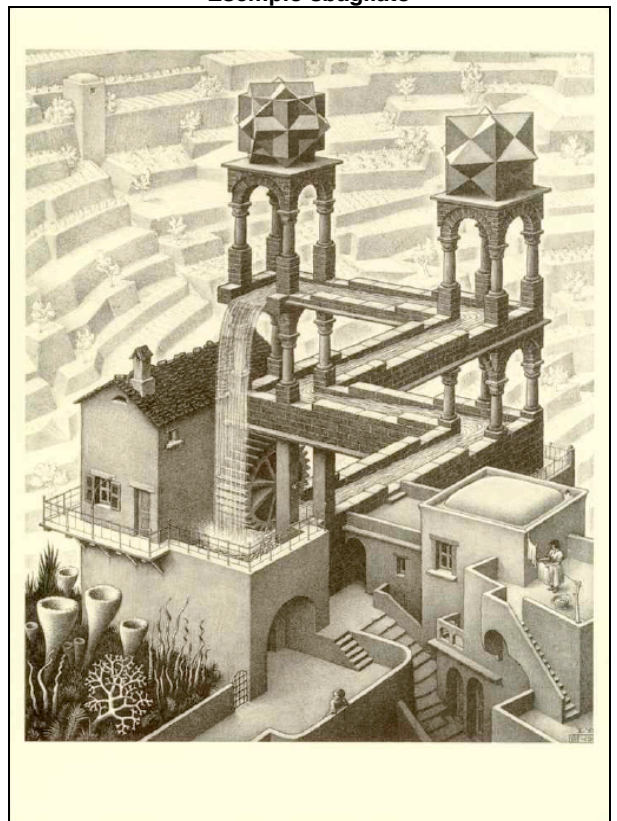


$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0$$

$$V_8 - V_6 - V_{10} + V_9 = 0$$

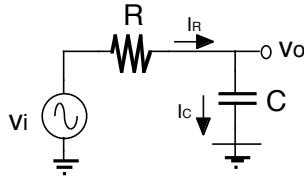
Legge di Kirchhoff delle tensioni

Esempio sbagliato



Funzione di trasferimento

Esempio



Si applica la legge di Kirchhoff delle correnti al nodo Vo:

$$I_R = I_C$$

Legge di Ohm per il ramo R si scrive come:

$$I_R = \frac{V_i - V_o}{R}$$

D'altro canto, la legge di Ohm per il ramo C e':

$$I_C = \frac{V_o}{\frac{1}{s \cdot C}} = s \cdot C \cdot V_o$$

Si riscrive quindi la legge di Kirchhoff:

$$I_R = \frac{V_i - V_o}{R} = I_C = s \cdot C \cdot V_o$$

Risolvendo per V_o si ottiene:

$$V_o = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot V_i$$

La funzione di trasferimento e' quindi:

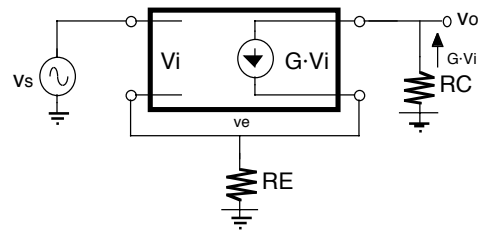
$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

I - 17

October 27, 2007

Funzione di trasferimento

Esempio



$$V_i = V_s - V_e$$

La corrente su R_E e' $I_{RE} = G \cdot V_i$, per cui si scrive V_e come:

$$V_e = R_E \cdot I_{RE} = R_E \cdot G \cdot V_i = R_E \cdot G \cdot (V_s - V_e)$$

Da cui si ricava V_e come:

$$V_e = \frac{G \cdot R_E}{1 + G \cdot R_E} \cdot V_s$$

La corrente I_{RE} e' allora data da:

$$I_{RE} = G \cdot V_i = G \cdot (V_s - V_e) = \frac{G}{1 + G \cdot R_E} \cdot V_s$$

Questa corrente va tutta su R_C . Si scrive allora la legge di Ohm per R_C :

$$G \cdot V_i = \frac{0 - V_o}{R_C}$$

$$\frac{G}{1 + G \cdot R_E} \cdot V_s = \frac{0 - V_o}{R_C}$$

Da cui si ricava:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = - \frac{G \cdot R_C}{1 + G \cdot R_E}$$

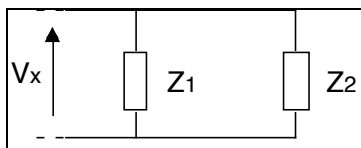
I - 18

October 27, 2007

Configurazioni parallelo e serie

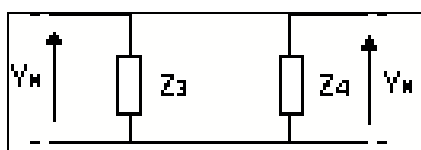
Configurazione parallelo (I)

- Due impedenze Z_1 e Z_2 sono connesse in parallelo quando sono connesse tra gli stessi nodi



- Se due impedenze Z_1 e Z_2 sono in parallelo, allora ai loro capi c'e' la stessa tensione

NON vale il viceversa: se ai capi di due impedenze c'e' la stessa tensione la due impedenze non sono necessariamente in parallelo



Z_3 e Z_4 **NON** sono in parallelo

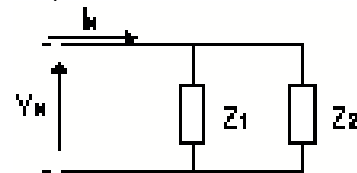
I - 19

October 27, 2007

Configurazioni parallelo e serie

Configurazione parallelo (II)

- Impedenza equivalente



L'impedenza equivalente di due impedenze (Z_1 e Z_2) in parallelo si valuta applicando un tensione di test (V_x) e calcolando la corrente in ingresso (I_x) risultante:

$$I_x = \frac{V_x}{Z_1} + \frac{V_x}{Z_2} = V_x \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{V_x}{Z_{12}}$$

Si puo' ricavare l'impedenza equivalente Z_{12} :

$$Z_{12} = \frac{V_x}{I_x} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- Esempio: $Z_1 = R_1 = 10\text{k}\Omega$, $Z_2 = R_2 = 200\text{k}\Omega$

$$Z_{12} = \frac{10\text{k}\Omega \cdot 200\text{k}\Omega}{10\text{k}\Omega + 200\text{k}\Omega} = 9.53\text{k}\Omega \approx R_1$$

Tra due impedenze molto diverse in parallelo domina la piu' piccola

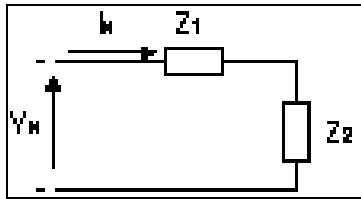
I - 20

October 27, 2007

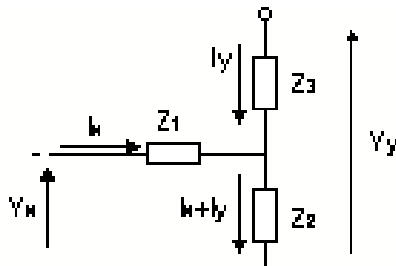
Configurazioni parallelo e serie

Configurazione serie (I)

- Due impedenze Z_1 e Z_2 sono connesse in serie quando sono attraversate dalla stessa corrente



E' necessario che TUTTA la corrente che passa in una impedenza passi tutta e sola quella nell'altra.



- In Z_2 non passa sola la corrente di Z_1
 $\Rightarrow Z_1$ e Z_2 **NON** sono in serie

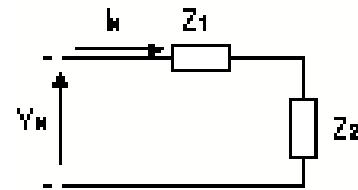
I - 21

October 27, 2007

Configurazioni parallelo e serie

Configurazione serie (II)

- Impedenza equivalente

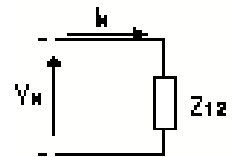


L'impedenza equivalente di due impedenze (Z_1 e Z_2) in parallelo si valuta applicando una tensione di test (V_x) e calcolando la corrente in ingresso (I_x) risultante:

$$I_x = \frac{V_x}{Z_1 + Z_2} = \frac{V_x}{Z_{12}}$$

Si può ricavare l'impedenza equivalente Z_{12} :

$$Z_{12} = \frac{V_x}{I_x} = Z_1 + Z_2$$



- Esempio: $Z_1 = R_1 = 10\text{k}\Omega$, $Z_2 = R_2 = 200\text{k}\Omega$

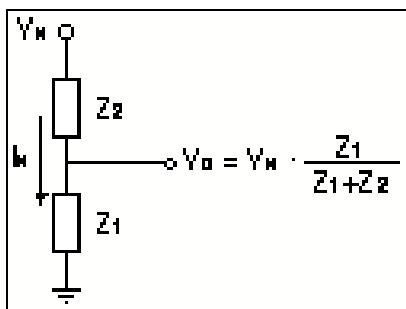
$$Z_{12} = 10\text{k}\Omega + 200\text{k}\Omega = 210\text{k}\Omega \approx R_2$$

Tra due impedenze molto diverse in serie domina la più grande

I - 22

October 27, 2007

Il partitore di tensione



La corrente I_x è data da:

$$I_x = \frac{V_x}{Z_1 + Z_2}$$

Per cui la tensione V_o risulta essere:

$$V_o = V_x \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

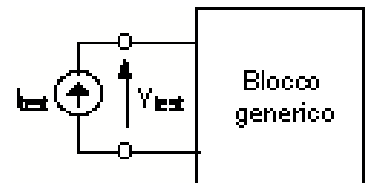
I - 23

October 27, 2007

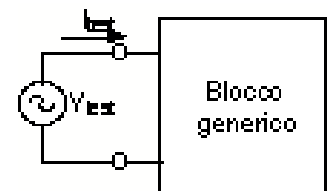
L'impedenza tra due nodi

- Per valutare l'impedenza che è presente tra due nodi di un blocco generico, a seconda dell'opportunità del circuito, si possono utilizzare due metodi

- Caso 1: si applica una corrente di segnale di test (I_{test}) e si legge la tensione ai capi (V_{test})



- Caso 2: si applica una tensione di segnale di test (V_{test}) e si legge la corrente provocata (I_{test})



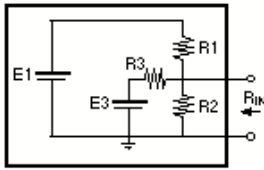
Per entrambi i casi vengono spenti tutti i generatori indipendenti (quelli di tensione sono corto-circuitati e quelli di corrente vengono aperti)

I - 24

October 27, 2007

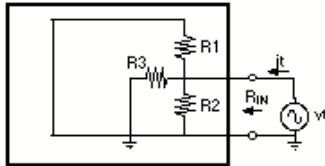
Esempio

Si calcoli l'impedenza di ingresso (R_{IN}) della rete in figura



Per prima cosa si spengono i generatori E_1 e E_3 e si applica il generatore di test v_t .

Ne risulta il seguente schema



L'impedenza di ingresso risulta essere data dal parallelo di R_1 , R_2 e R_3 . Risulta pertanto:

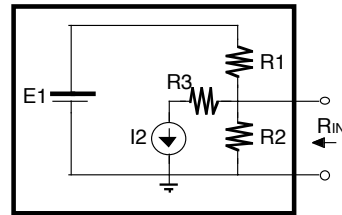
$$R_{IN} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

Assumendo $R_1=10\text{k}\Omega$, $R_2=10\text{k}\Omega$, $R_3=10\text{k}\Omega$, si ha che:

$$R_{IN} = 3.33 \text{ k}\Omega$$

Esempio

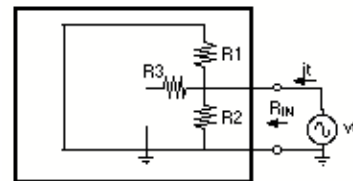
Si calcoli l'impedenza di ingresso (R_{IN}) della rete in figura.



$$\begin{aligned} R_1 &= 10\text{k}\Omega \\ R_2 &= 10\text{k}\Omega \\ R_3 &= 10\text{k}\Omega \end{aligned}$$

In questo caso il generatore di corrente, quando viene spento diventa un circuito aperto.

Si ottiene pertanto il seguente circuito



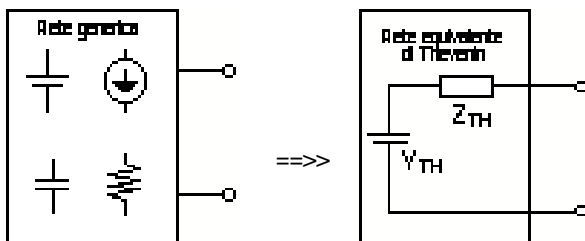
L'impedenza di ingresso risulta essere data dal parallelo di R_1 e R_2 . Risulta pertanto:

$$R_{IN} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5\text{k}\Omega$$

I teoremi di Thevenin e di Norton

Teorema di Thevenin

- Data una rete con componenti attivi e passivi, questa può essere sostituita con un circuito equivalente costituito da un generatore di tensione (V_{TH}) e da un'impedenza (Z_{TH}) a lui in serie.



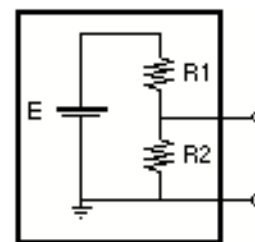
Calcolo del circuito equivalente di Thevenin

- La tensione di Thevenin (V_{TH}) si valuta calcolando la tensione che appare ai morsetti esterni della rete senza collegarci alcun carico ("a vuoto")
- La resistenza di Thevenin (R_{TH}) si valuta calcolando l'impedenza vista ai morsetti della rete, dopo aver spento tutti i generatori

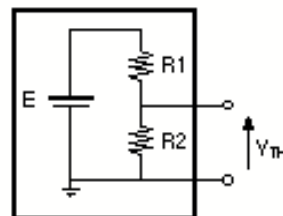
N.B.: I generatori dipendenti restano attivi

Circuito Equivalente di Thevenin

Esempio

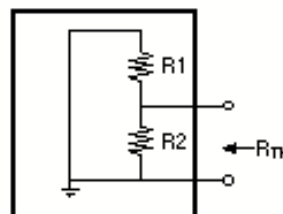


Tensione equivalente di Thevenin (V_{TH})



$$V_{TH} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

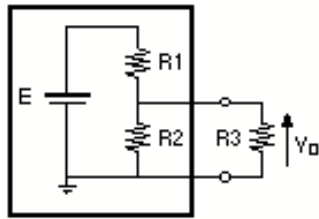
Resistenza equivalente di Thevenin (R_{TH})



$$R_{TH} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Uso del teorema di Thevenin

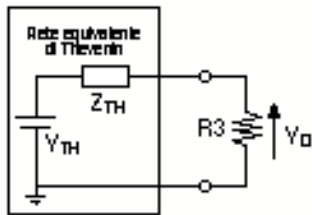
Esempio



$$\begin{aligned} E &= 5V \\ R_1 &= 10k\Omega \\ R_2 &= 10k\Omega \\ R_3 &= 10k\Omega \end{aligned}$$

Si calcoli V_o .

La rete nel riquadro si sostituisce con il suo equivalente di Thevenin e si ottiene il seguente circuito



Con

$$\begin{aligned} V_{TH} &= E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \\ V_{TH} &= 2.5V \end{aligned}$$

$$Z_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5k\Omega$$

La tensione V_o si può allora calcolare con la legge del partitore:

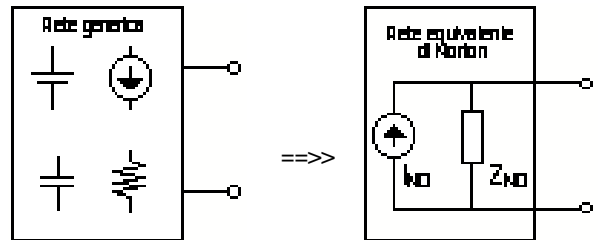
$$V_o = V_{TH} \cdot \frac{R_3}{R_3 + Z_{TH}} = 1.66 V$$

I - 29

October 27, 2007

Teorema di Norton

- Data una rete con componenti attivi e passivi, questa può essere sostituita con un circuito equivalente costituito da un generatore di corrente (I_{NO}) e da un'impedenza (Z_{NO}) a lui in parallelo.



Calcolo del circuito equivalente di Norton

- La corrente di Norton (I_{NO}) si valuta calcolando la corrente che viene forzata tra i due morsetti esterni della rete cortocircuitata
- La resistenza di Norton (R_{NO}) si valuta calcolando l'impedenza vista ai morsetti della rete, dopo aver spento tutti i generatori

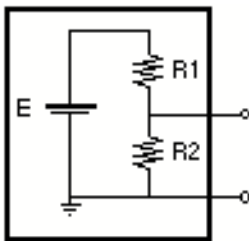
N.B.: I generatori dipendenti restano attivi

I - 30

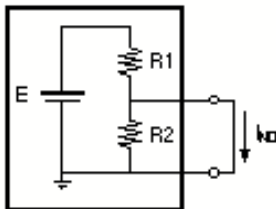
October 27, 2007

Circuito Equivalente di Norton

Esempio

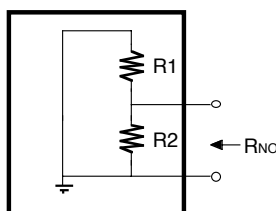


Corrente equivalente di Norton (I_{NO})



$$I_{NO} = \frac{E}{R_1}$$

Resistenza equivalente di Norton (R_{NO})



$$R_{NO} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

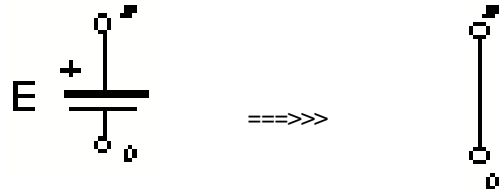
I - 31

October 27, 2007

Il principio di sovrapposizione degli effetti

Data una rete lineare con n ingressi, l'evoluzione dei vari nodi si ottiene come somma delle evoluzioni che si ottengono mantenendo attiva una sola sorgente e spegnendo tutte le altre.

- Una sorgente di tensione E si spegne ponendo $E=0$ (cioè facendo un corto-circuito)



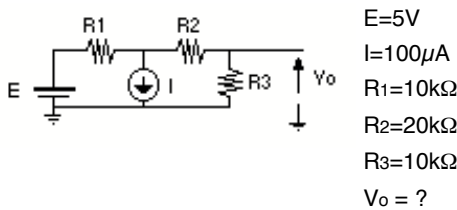
- Una sorgente di corrente I si spegne ponendo $I=0$ (cioè facendo un circuito aperto)



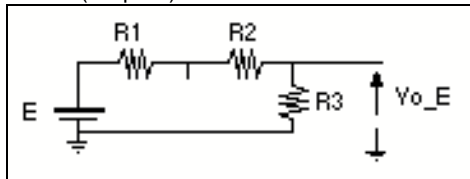
I - 32

October 27, 2007

Esempio (I)

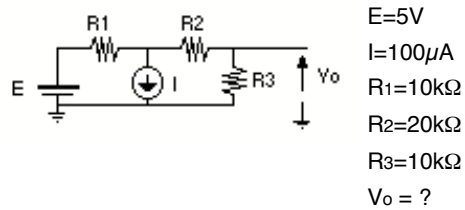


- Effetto di E (si apre I)

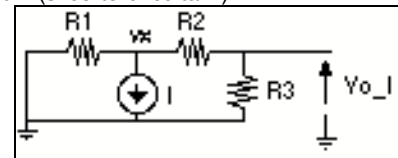


$$V_{o_E} = E \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1.25 V$$

Esempio (II)



- Effetto di I (si corto-circuita E)



$$\frac{0 - V_x}{R_1} + \frac{0 - V_x}{R_2 + R_3} = I$$

Legge di Kirchhoff delle correnti al nodo X

$$V_x = I \cdot \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

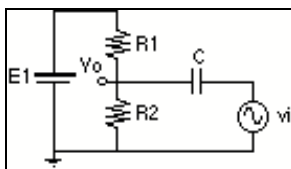
$$V_{o_I} = V_x \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 0.75V$$

Legge di Kirchhoff delle correnti al nodo Vo (partitore resistivo)

$$V_o = V_{o_E} + V_{o_I} = 2V$$

Esempio

Accoppiamento in ac



Applicando solo E1 (ed annullando vi) si ottiene:

$$V_{o_E1} = \frac{\frac{R_2}{1+s \cdot C \cdot R_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1+s \cdot C \cdot R_2}} \cdot E1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot E1$$

Applicando solo vi (ed annullando E1) si ottiene:

$$V_{o_vi} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{1}{s \cdot C}} \cdot vi = \frac{s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot vi$$

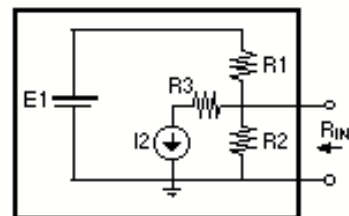
Sommando i due contributi si ottiene:

$$V_o = \frac{(E1 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot vi) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + s \cdot C \cdot R_1 \cdot R_2}$$

- Questo circuito puo' essere usato quando si vuole avere un segnale (vi) sovrapposto ad un valore di tensione continua (E) e si dispone di un generatore di segnale che puo' essere collegato solo a massa (o, piu' generalmente, ad una tensione continua diversa da E).
- E' basato sulla differente frequenza dei due segnali

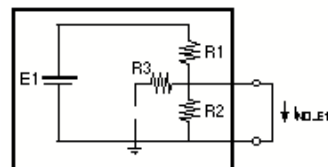
Circuito Equivalente di Norton

Esempio



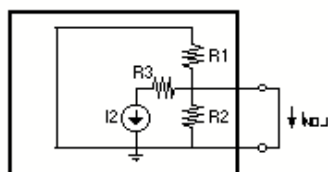
Corrente equivalente di Norton (INO): si usa la sovrapposizione degli effetti dei due generatori (E1 e I2).

Effetto di E1



$$I_{NO_E1} = \frac{E1}{R1}$$

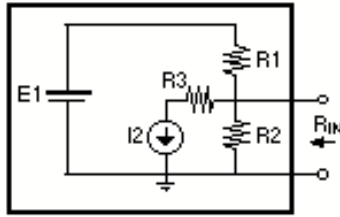
Effetto di I2



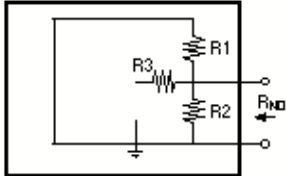
$$I_{NO_I2} = -I2$$

Circuito Equivalente di Norton

Esempio

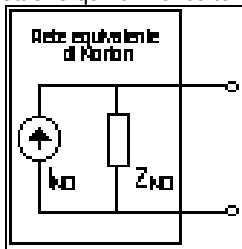


Resistenza equivalente di Norton (R_{NO})



$$R_{NO} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Si ottiene quindi il circuito equivalente mostrato in Figura



$$I_{NO} = I_{NO_E1} + I_{NO_I2} = \frac{E}{R_1} - I_2$$

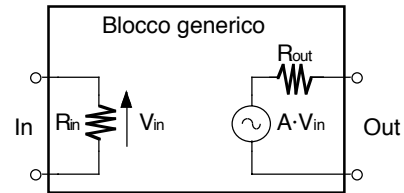
$$R_{NO} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

I - 37

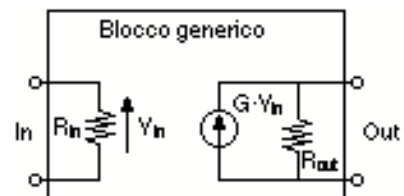
October 27, 2007

Modellizzazione dell'impedenza di ingresso / uscita

- Con amplificatore di tensione in uscita (circuito equivalente di Thevenin)



- Con amplificatore di transconduttanza in uscita (circuito equivalente di Norton)

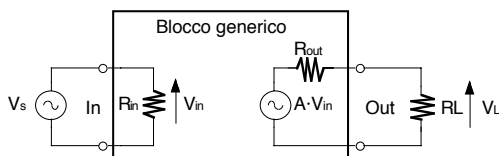


I - 38

October 27, 2007

Effetto dell'impedenza di ingresso/uscita

- Effetto dell'impedenza di uscita (R_{out})

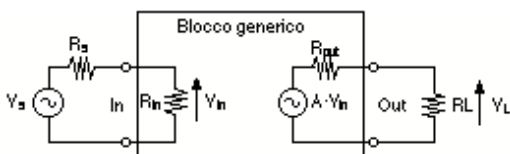


$$V_L = A \cdot V_s \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{out}}$$

R_{out} dovrebbe essere la più piccola possibile

- Effetto dell'impedenza di ingresso (R_{in})

Nell'ipotesi di $R_{out} = 0$



$$V_{in} = V_s \cdot \frac{R_{in}}{R_s + R_{in}}$$

$$V_L = A \cdot V_{in} = A \cdot V_s \cdot \frac{R_{in}}{R_s + R_{in}}$$

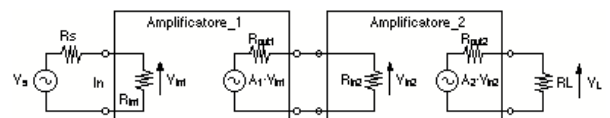
R_{in} dovrebbe essere la più grande possibile

I - 39

October 27, 2007

Composizione di blocchi in cascata

- Calcolo del guadagno



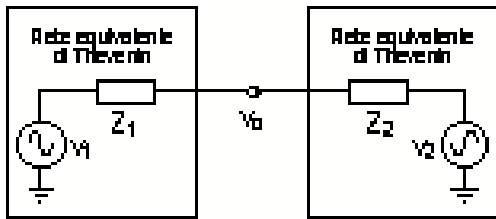
$$\frac{V_L}{V_s} = \frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_s} \cdot A_1 \cdot \frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}} \cdot A_2 \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{out2}}$$

$$\frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_s}, \frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}}, \frac{R_L}{R_L + R_{out2}} \text{ sono termini di perdita}$$

I - 40

October 27, 2007

Combinazione di circuiti equivalenti



Con la sovrapposizione degli effetti si può trovare:

$$V_o = V_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + V_2 \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- Per $Z_1 \gg Z_2$:

$$V_o \approx V_2$$

- Per $Z_2 \gg Z_1$:

$$V_o \approx V_1$$

Cioè

La tensione in un nodo viene fissata dal circuito a più bassa impedenza

La trasformata di Laplace e la risposta in transitorio

- I circuiti elettronici hanno un comportamento diverso a seconda della frequenza del segnale che viene loro applicato
- Esiste una relazione tra la risposta in frequenza di un circuito e la sua risposta in transitorio ad un determinato stimolo.
- La trasformata di Laplace permette di passare dal dominio della risposta in frequenza (s) al dominio della risposta nel tempo
- Data la generica funzione di trasferimento ($H(s)$) e la trasformata di Laplace del segnale di ingresso ($V_i(s)$), la risposta in transitorio in uscita $v_o(t)$ si ottiene antitrasformando secondo Laplace il prodotto. Cioè

$$v_o(t) = L^{-1} \{ H(s) \cdot V_i(s) \}$$

La trasformata di Laplace

- Nella seguente tabella sono elencate alcune semplici trasformate di Laplace

== L ==>

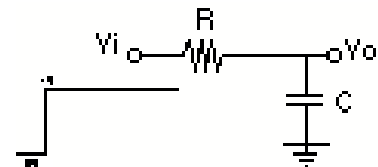
Dominio t (h(t))	Dominio s (H(s))
sca(t)	$\frac{1}{s}$
$\frac{\exp(-\frac{t}{\tau_p})}{\tau_p}$	$\frac{1}{1 + s \cdot \tau_p}$
$1 - \exp(-\frac{t}{\tau_p})$	$\frac{1}{s \cdot (1 + s \cdot \tau_p)}$
$1 - (1 - \frac{\tau_z}{\tau_p}) \cdot \exp(-\frac{t}{\tau_p})$	$\frac{1 + s \cdot \tau_z}{s \cdot (1 + s \cdot \tau_p)}$

<== L⁻¹ ==

Si assume di applicare lo stimolo con inizio a $t=0$
L'evoluzione che si ottiene vale per $t \geq 0$

Esempio

Risposta all'impulso di un filtro RC (passa-basso)



- Funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{s \cdot C}}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} = \frac{1}{1 + s \cdot \tau_p}$$

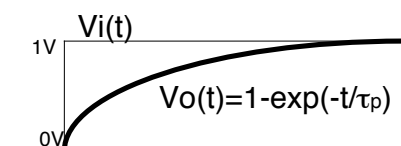
- Si applica il gradino e l'uscita risulta:

$$V_o(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_p} = \frac{1}{s \cdot (1 + s \cdot \tau_p)}$$

- Si antitrasforma e si ottiene:

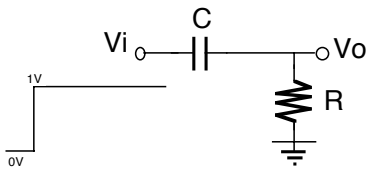
$$V_o(t) = 1 - \exp(-\frac{t}{\tau_p})$$

- L'evoluzione del nodo di uscita risulta:



Esempio

Risposta all'impulso di un filtro CR (passa-alto)



- Funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{s \cdot C}} = \frac{s \cdot R \cdot C}{1 + s \cdot R \cdot C} = \frac{s \cdot \tau_p}{1 + s \cdot \tau_p}$$

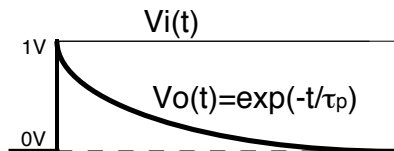
- Si applica il gradino e l'uscita risulta:

$$V_o(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot \tau_p}{1 + s \cdot \tau_p} = \frac{\tau_p}{1 + s \cdot \tau_p}$$

- Si antitrasforma e si ottiene:

$$V_o(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)$$

- L'evoluzione del nodo di uscita risulta:



I teoremi del valore iniziale e del valore finale

Teorema del valore iniziale

Dati un circuito con funzione di trasferimento $H(s)$ ed uno stimolo con trasformata di Laplace $V_i(s)$, il valore iniziale (cioè per $t=0^+$) dell'uscita $V_o(t)$ si ottiene come:

$$V_o(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) \cdot V_i(s)$$

Esempio:

nel circuito RC la risposta all'impulso comporta:

$$V_o(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{s} = 0V$$

nel circuito CR la risposta all'impulso comporta:

$$V_o(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s \cdot R \cdot C}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{s} = 1V$$

I teoremi del valore iniziale e del valore finale

Teorema del valore finale

Dati un circuito con funzione di trasferimento $H(s)$ ed uno stimolo con trasformata di Laplace $V_i(s)$, il valore finale (cioè per $t \rightarrow \infty$ a transitorio concluso) dell'uscita $V_o(t)$ si ottiene come:

$$V_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \cdot V_i(s)$$

Esempio:

nel circuito RC la risposta all'impulso comporta:

$$V_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{s} = 1V$$

nel circuito CR la risposta all'impulso comporta:

$$V_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s \cdot R \cdot C}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

I diagrammi di Bode

- La funzione di trasferimento di un circuito nel dominio s diventa lineare e si può scrivere:

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s^3 + a_4 \cdot s^4 + \dots}{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + b_3 \cdot s^3 + b_4 \cdot s^4 + \dots} = \frac{(s + \tau_{z1}) \cdot (s + \tau_{z2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{z1} / Q_{z1} + \omega_{z1}^2) \cdot \dots}{(s + \tau_{p1}) \cdot (s + \tau_{p2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{p1} / Q_{p1} + \omega_{p1}^2) \cdot \dots}$$

- Cioè si può scomporre in polinomi al numeratore (zeri) ed al denominatore (poli) del primo e del secondo ordine

Con i diagrammi di Bode si dà una rappresentazione asintotica (cioè accurata solo per frequenze lontane da quelle dei poli e zeri) della risposta in frequenza in modulo e fase di un circuito.

Data $H(s)$, si definisce:

Modulo $|H(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(|H(s)|)$

Fase

$$\angle H(s) = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(H(s))}{\text{Re}(H(s))} \right)$$

Diagramma di Bode di un polo

Studiamo il caso di un singolo polo:

$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

Il denominatore si annulla per $s = -1/\tau$, che viene definito polo.

- $1/\tau$ e' la pulsazione del polo (che avendo parte reale negativa, sta nel semipiano sinistro)

Si sostituisce a $s = j\omega$ e si scrive $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

Da questa si possono ricavare le espressioni del modulo e della fase.

Per il modulo:

$$|H(s)|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}_{10}(|H(s)|) = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right|\right) = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\left|\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}}\right|\right)$$

A questo punto si fa la distinzione:

- per $\omega\tau \ll 1$, si ha che:

$$|H(s)|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\left|\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}}\right|\right) \approx 20 \cdot \text{Log}_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

Cioe' per valori della pulsazione inferiori al polo il diagramma e' costante.

Diagramma di Bode di un polo

- per $\omega\tau \gg 1$, si ha che:

$$|H(s)|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\left|\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}}\right|\right) \approx 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

Se la frequenza del segnale viene moltiplicata per 10 si ha:

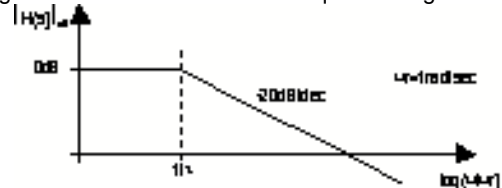
$$H(10\omega) = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\frac{1}{10\omega\tau}\right) = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\frac{1}{10}\right) + 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) =$$

$$= -20\text{dB} + 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right) = -20\text{dB} + H(\omega)$$

$$H(10\omega) = -20\text{dB} + H(\omega)$$

Cioe' per frequenze superiori a quella del polo si ha una pendenza di -20dB/dec

Il diagramma di Bode del modulo e' quindi il seguente:



In ascissa si usa una scala logaritmica della pulsazione normalizzata ad una pulsazione di riferimento (ω_r) scelta a piacere.

In ordinata si riporta il modulo in dB

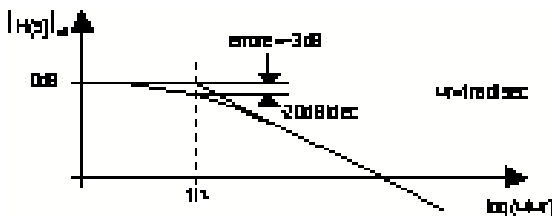
Fissata la posizione del polo ($1/\tau$), per pulsazioni inferiori al polo il modulo e' costante e vale 0dB

Per frequenze superiori al polo il modulo diminuisce con pendenza -20dB/dec

Approssimazione del diagramma di Bode

Nell'intorno del polo il diagramma non da una buona rappresentazione della reale risposta in frequenza del circuito.

In figura e' mostrato il diagramma di Bode e la relativa risposta in frequenza reale.



Infatti alla frequenza del polo (per cui non vale ne' $\omega\tau \ll 1$, ne' $\omega\tau \gg 1$, ma anzi vale $\omega\tau = 1$) il modulo di $H(s)$ si calcola come:

$$|H(\omega=1/\tau)|_{dB} = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\left|\sqrt{\frac{1}{1+\omega^2\tau^2}}\right|\right) = 20 \cdot \text{Log}_{10}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -3\text{dB}$$

Diagramma di Bode di un polo

Per la risposta in fase:

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

La fase della funzione di trasferimento e' definita come:

$$\angle H(s) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H(s))}{\text{Re}(H(s))}\right)$$

Si puo' operare la trasformazione:

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \cdot \frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau} = \frac{1-j\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}$$

Nella nuova espressione di $H(\omega)$, il denominatore e' sempre reale e quindi non porta contributi alla fase.

La fase del numeratore risulta essere:

$$\angle H(\omega) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(H(\omega))}{\text{Re}(H(\omega))}\right) = \text{atan}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = -\text{atan}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) =$$

L'atan vale 0 per $\omega\tau \ll 1$ e poi passa a 90° per $\omega\tau \gg 1$

Anche in questo caso si ricorre ad un grafico lineare a tratti che e' un'approssimazione dell'atan.

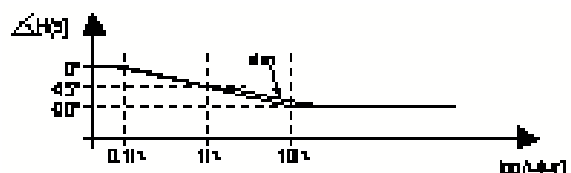
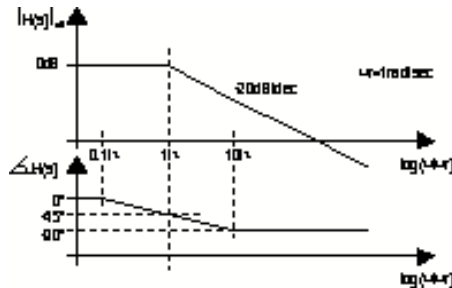


Diagramma di Bode di un polo

Il diagramma di Bode per la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

risultano essere:



Proprietà dei diagrammi di Bode

Risposta in modulo

- 1- Relazione tra diagramma di Bode di ampiezza di un polo ed uno zero

$$\left| \frac{1}{H(s)} \right|_{dB} = -|H(s)|_{dB}$$

Dim.:

$$\left| \frac{1}{H(s)} \right|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(1/H(s)) = 20 \cdot \log_{10}(1) - 20 \cdot \log_{10}(H(s)) =$$

$$\left| \frac{1}{H(s)} \right|_{dB} = -|H(s)|_{dB}$$

- 2- Composizione di diagrammi di Bode di ampiezza

$$|H_1(s) \cdot H_2(s)|_{dB} = |H_1(s)|_{dB} + |H_2(s)|_{dB}$$

Dim.:

$$|H_1(s) \cdot H_2(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(H_1(s) \cdot H_2(s)) =$$

$$|H_1(s) \cdot H_2(s)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(H_1(s)) + 20 \cdot \log_{10}(H_2(s)) =$$

$$|H_1(s) \cdot H_2(s)|_{dB} = |H_1(s)|_{dB} + |H_2(s)|_{dB}$$

Proprietà dei diagrammi di Bode

Risposta in fase

- 3- Relazione tra diagramma di fase di un polo ed uno zero

$$\angle \frac{1}{H(\omega)} = -\angle H(\omega)$$

Dim.:

$$H(\omega) = |H(s)| \cdot e^{j\angle H(\omega)}$$

$$\frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{|H(s)|} \cdot e^{-j\angle H(\omega)}$$

- 4- Composizione di diagrammi di Bode di fase

$$\angle (H_1(\omega) \cdot H_2(\omega)) = \angle H_1(\omega) + \angle H_2(\omega)$$

Dim.:

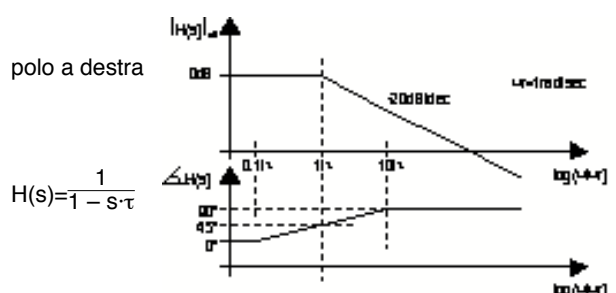
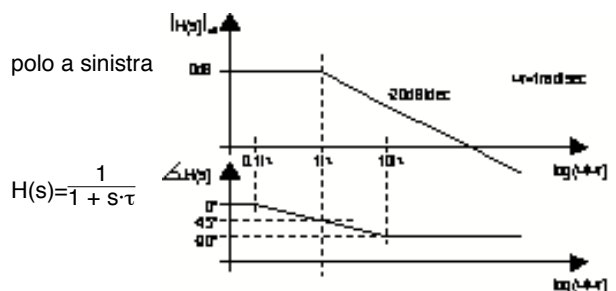
$$H_1(\omega) = |H_1(s)| \cdot e^{j\angle H_1(\omega)}$$

$$H_2(\omega) = |H_2(s)| \cdot e^{j\angle H_2(\omega)}$$

$$H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) = (|H_1(s)| \cdot |H_2(s)|) \cdot e^{j(\angle H_1(\omega) + \angle H_2(\omega))}$$

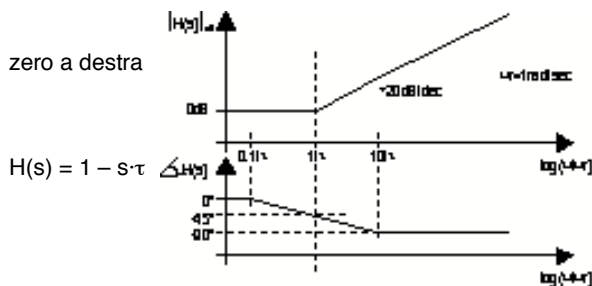
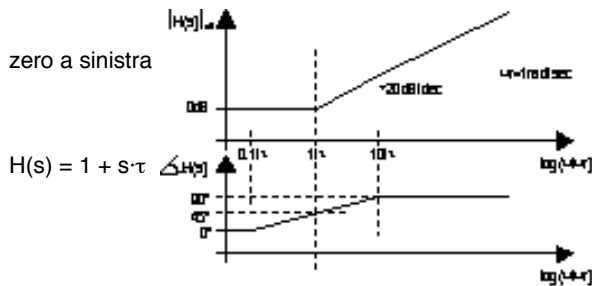
Diagrammi di Bode del 1° ordine

- Poli a destra e sinistra



Diagrammi di Bode del 1° ordine

- Zeri a destra e sinistra



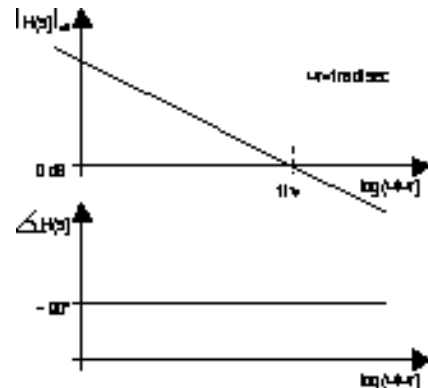
I - 57

October 27, 2007

Diagrammi di Bode con polo nell'origine

Polo nell'origine:

$$H(s) = \frac{1}{s \cdot \tau_p}$$



Il grafico del modulo interseca la linea di 0dB nel punto in cui $s \cdot \tau_p = 1$ (cioè per $s = \tau_p$)

La fase è sempre -90° in quanto si può scrivere:

$$H(\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \tau_p} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot \tau_p}$$

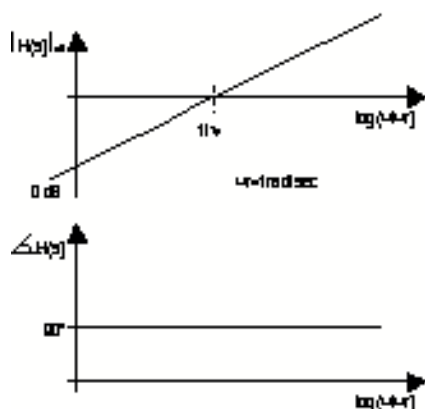
I - 58

October 27, 2007

Diagrammi di Bode con zero nell'origine

Zero nell'origine:

$$H(s) = s \cdot \tau_p$$



Il grafico del modulo interseca la linea di 0dB nel punto in cui $s \cdot \tau_p = 1$ (cioè per $s = \tau_p$)

La fase è sempre 90° in quanto si può scrivere:

$$H(\omega) = j \cdot \omega \cdot \tau_p$$

I - 59

October 27, 2007

Generico diagramma di Bode

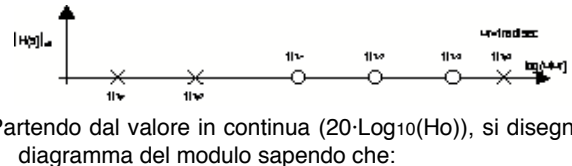
Per costruire il diagramma di Bode di una funzione di trasferimento generica si scrive la stessa in forma canonica (si supponga per ora di avere solo termini del primo ordine):

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \dots}$$

$$= H_0 \cdot \frac{(1 + s \cdot \tau_{z1}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{z2}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{z3}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{z4}) \cdot \dots}{(1 + s \cdot \tau_{p1}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{p2}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{p3}) \cdot (1 + s \cdot \tau_{p4}) \cdot \dots}$$

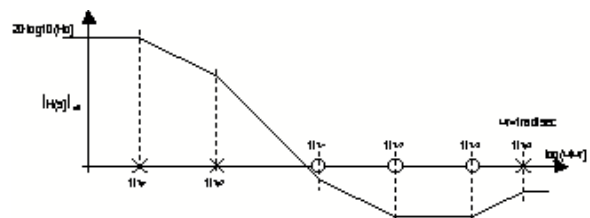
Si riportano quindi le posizioni di poli e zeri sull'ascissa (usando per comodità $\omega = 1 \text{ rad/sec}$)

Si supponga che tutte le singolarità (poli e zeri) stiano nel semipiano sinistro



Partendo dal valore in continua ($20 \cdot \log_{10}(H_0)$), si disegna il diagramma del modulo sapendo che:

- un polo provoca una variazione di pendenza di -20 dB/dec
- uno zero provoca una variazione di pendenza di $+20 \text{ dB/dec}$



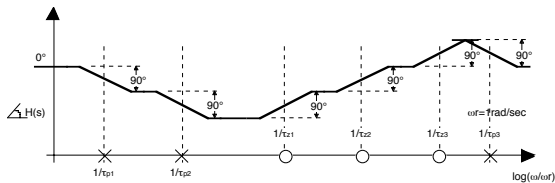
I - 60

October 27, 2007

Generico diagramma di Bode

Partendo dal valore in continua (0° se $H_0 > 0$, o -180° per $H_0 < 0$), si disegna il diagramma del modulo sapendo che:

- un polo provoca una diminuzione della fase di 90° a partire da una decade prima fino a una decade dopo la posizione del polo
- uno zero provoca un aumento della fase di 90° a partire da una decade prima fino a una decade dopo la posizione dello zero



Diagrammi di Bode del 2° ordine

La generica funzione di trasferimento si può scrivere come:

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \dots}$$

$$= \frac{(s + \tau_{z1}) \cdot (s + \tau_{z2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{z1}/Q_{z1} + \omega_{z1}^2) \cdot \dots}{(s + \tau_{p1}) \cdot (s + \tau_{p2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{p1}/Q_{p1} + \omega_{p1}^2) \cdot \dots}$$

- Ora si studia come tracciare il diagramma di Bode del blocco del 2° ordine

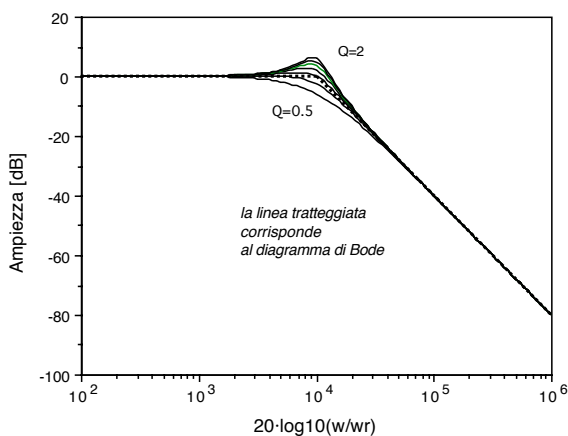
$$H(s) = \frac{\omega_{p1}^2}{s^2 + s \cdot \frac{\omega_{p1}}{Q_{p1}} + \omega_{p1}^2}$$

- Il diagramma di Bode è un diagramma asintotico, cioè è richiesto essere corretto solo agli asintoti (lontano dalla singolarità), mentre vicino alla singolarità sono possibili grosse differenze tra il diagramma di Bode ed il reale andamento della funzione di trasferimento.
- Di seguito sono tracciati i diagrammi di Bode relativi a $\omega_{p1} = 10^4$ con Q_{p1} variabile tra 0.5 e 2.

Diagrammi di Bode del 2° ordine

Risposta in ampiezza

- Il diagramma della fase corrisponde alla presenza di due poli coincidenti alla pulsazione ω_{p1} .
- Ciò corrisponde ad avere nel diagramma dell'ampiezza un cambio di pendenza di -40dB/dec

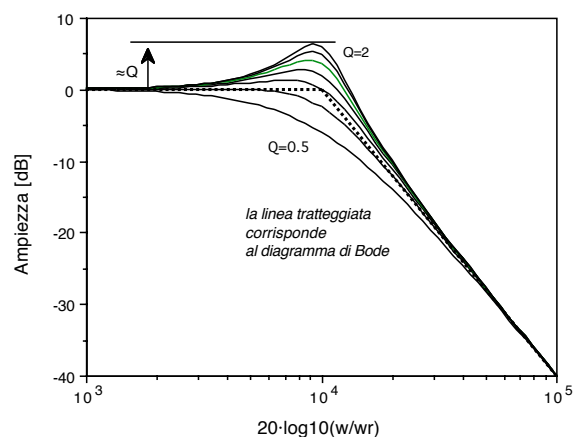


- Il diagramma di Bode ben approssima quello reale dell'ampiezza lontano dal polo

Diagrammi di Bode del 2° ordine

Risposta in ampiezza

- Nell'intorno del polo la differenza tra il diagramma di Bode e l'andamento dell'ampiezza può essere considerevole



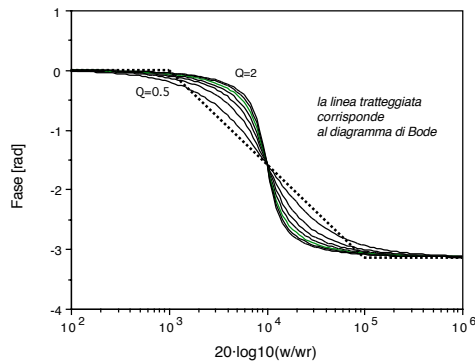
- Alla pulsazione del polo ω_{p1} ($s = j \cdot \omega_{p1}$) si può calcolare l'ampiezza reale

$$H(s = j \cdot \omega_{p1}) = \frac{\omega_{p1}^2}{s^2 + s \cdot \frac{\omega_{p1}}{Q_{p1}} + \omega_{p1}^2} = Q_{p1}$$

Diagrammi di Bode del 2° ordine

Risposta in fase

- Il diagramma della fase corrisponde alla presenza di due poli coincidenti alla pulsazione ω_{p1} .
- Cio' corrisponde ad avere nella fase una riduzione di π (-3.1415 cioè 180°) tra una decade prima ed una decade dopo il polo



- In figura si può vedere come in realtà nell'intorno del polo la fase sia differente dal diagramma di Bode e come dipenda dal valore del fattore di qualità Q

I - 65

October 27, 2007

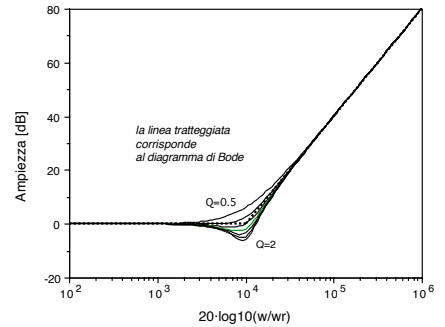
Diagrammi di Bode del 2° ordine

- Con le regole su descritte è possibile tracciare i diagrammi di Bode per uno zero a ω_{z1}

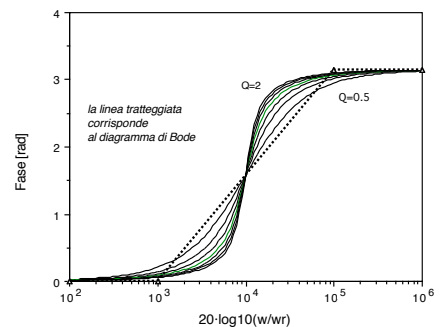
$$H(s) = \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_{z1}}{Q_{z1}} + \omega_{z1}^2}{\omega_{z1}^2}$$

- Sempre nel caso di $\omega_{z1}=10^4$ rad/sec

Ampiezza



Fase



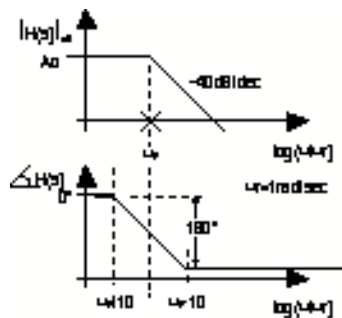
I - 66

October 27, 2007

Diagrammi di Bode del 2° ordine

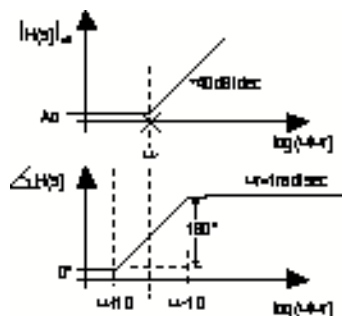
poli complessi coniugati a sinistra

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s \cdot \frac{\omega_p}{Q} + \omega_p^2}$$



zeri complessi coniugati a sinistra

$$H(s) = \frac{s^2 + s \cdot \frac{\omega_z}{Q} + \omega_z^2}{\omega_z^2}$$



I - 67

October 27, 2007

Esercizio

Utilizzando le regole dei diagrammi di Bode precedentemente indicate, si traccino i diagrammi di Bode delle seguenti funzioni di trasferimento:

$$1. H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 - s \cdot \frac{\omega_p}{Q_p} + \omega_p^2}$$

$$2. H(s) = \frac{s^2 - s \cdot \frac{\omega_{z1}}{Q_{z1}} + \omega_{z1}^2}{\omega_{z1}^2}$$

$$3. H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s + 10}$$

I - 68

October 27, 2007

Esercizio (I)

Si traccino i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{10}{10^3 + s}$$

Si calcoli l'ampiezza in uscita di una sinusoide in ingresso di 1V e di pulsazione di 10rad/sec e di 10⁶rad/sec.

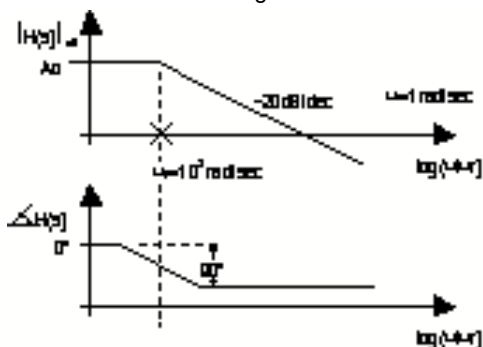
La f.d.t. si riscrive in forma canonica come:

$$H(s) = \frac{10}{10^3 + s} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{1 + s/\omega_p}$$

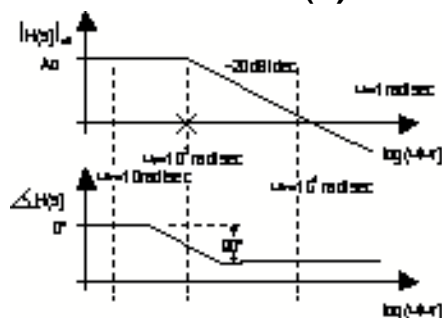
La f.d.t. ha un polo alla pulsazione $\omega_p = 10^3$.

Il guadagno in continua (per $s=0$) e' $A_o = 0.01$ (-40dB).

I diagramma di Bode sono i seguenti:



Esercizio (II)



La pulsazione $\omega_{in} = 10$ rad/sec e' inferiore alla pulsazione del polo che quindi non e' ancora intervenuto, come si vede dal diagramma di Bode. La f.d.t. ha un guadagno quindi pari a $A_o = 0.01$ e l'uscita e' una sinusoide di 10mV.

La pulsazione $\omega_{in} = 10^6$ rad/sec e' superiore alla pulsazione del polo che quindi e' intervenuto, come si vede dal diagramma di Bode.

Il guadagno si puo' calcolare per ispezione del diagramma di Bode o per calcolo dalla funzione di trasferimento.

Per ispezione dal diagramma di Bode si puo' osservare che la pulsazione che e' 10³ volte (cioe' 3 decadi) maggiore della frequenza del polo. Quindi avendo una pendenza di -20dB/dec si ha una perdita di -60dB rispetto al valore alla pulsazione del polo che e' il valore in continua ($A_o = 0.01 = -40$ dB). Il guadagno quindi e':

$$|H(10^6 \text{ rad/sec})| = -40\text{dB} - 60\text{dB} = -100\text{dB}$$

Il guadagno di -100dB corrisponde a 10⁻⁵, e quindi la sinusoide in uscita avra' un'ampiezza di 10⁻⁵V.

Esercizio (III)

Dal calcolo della funzione di trasferimento sostituendo $s = j \cdot 10^6$ rad/sec e calcolandone il modulo si ottiene:

$$|H(s=j\omega_{in})| = |H(s=j \cdot 10^6 \text{ rad/sec})| = \left| \frac{10}{10^3 + j \cdot 10^6 \text{ rad/sec}} \right| = \sqrt{\frac{10^2}{(10^3)^2 + (10^6)^2}} = 9.999995000003749 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-5}$$

Si ottiene quindi lo stesso risultato precedentemente trovato per ispezione del diagramma di Bode.

Esercizio (I)

Si traccino i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{10^{12} \cdot (1000 + s)}{10^{12} + 1.0000001 \cdot 10^{12} \cdot s + 100001 \cdot s^2 + s^3}$$

La f.d.t. si puo' riscrivere come:

$$H(s) = \frac{10000000 \cdot (s+1000)}{(s+1) \cdot (s^2 + s \cdot \omega_o/Q + \omega_o^2)}$$

con

$$\omega_o = 10^6 \text{ rad/sec}; Q=10$$

Ci sono 3 poli (due complessi coniugati) ed uno zero.

I poli sono alla pulsazioni:

$$\omega_o = 10^6 \text{ rad/sec (2 poli compl. coniugati)}$$

$$\omega_p = 1 \text{ rad/sec (polo reale)}$$

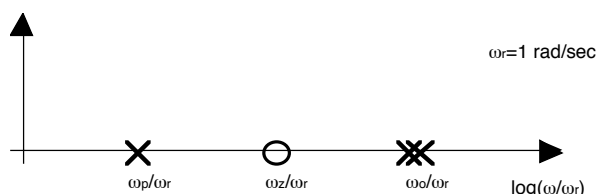
Lo zero e' alla pulsazione:

$$\omega_z = 10^3 \text{ rad/sec}$$

Il guadagno in continua A_o si valuta ponendo $s=0$ e si ottiene:

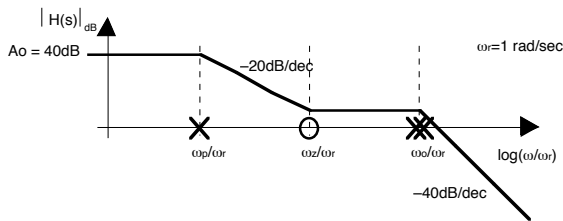
$$A_o = \frac{10^{12} \cdot 100}{10^{12}} = 100 = 40\text{dB}$$

Si piazzano allora poli e zeri sull'asse delle ascisse usando $\omega_r = 1 \text{ rad/sec}$

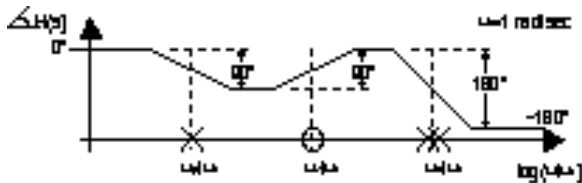


Esercizio (II)

Per il guadagno si piazza il valore in continua (A_o) e poi si procede ricordando che un polo diminuisce la pendenza di 20dB/dec mentre uno zero la aumenta di 20dB/dec. Si ottiene quindi:



Per la fase, si parte dal valore in continua (che qui è 0° in quanto non ci sono singolarità nell'origine o cambi di segno) e si aggiungono 90° per ogni zero o si tolgono 90° per ogni polo (180° per ogni polo doppio). Si ottiene quindi il diagramma della fase:

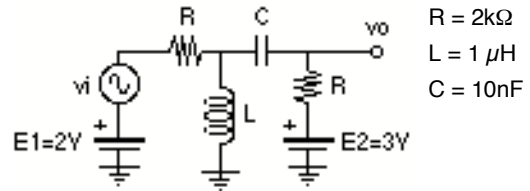


Esercizio

Del circuito in figura si calcoli:

- il punto di lavoro (la polarizzazione)

- la funzione di trasferimento (cioè il guadagno $\frac{V_o}{V_i}(s)$) e se ne traccino i diagrammi di Bode



Esercizio

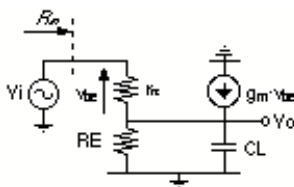
Del circuito in figura si calcoli:

- il punto di lavoro (la polarizzazione)

- la funzione di trasferimento (cioè il guadagno $\frac{V_o}{V_i}(s)$) e se ne traccino i diagrammi di Bode

- il guadagno per una sinusoide in ingresso di 10MHz

- la risposta in uscita ad un gradino in ingresso di 100mV



$$\begin{aligned} r_{\pi} &= 2\text{k}\Omega \\ g_m &= 10\text{mA/V} \\ R_E &= 10\text{k}\Omega \\ C_L &= 10\text{nF} \end{aligned}$$

Capitolo II

Il diodo a semiconduttore

Indice

I semiconduttori	2
La giunzione p-n: il diodo	11
Polarizzazione del diodo	13
Uso del diodo per grandi segnali	30
Circuito equivalente per piccoli segnali	42
Il diodo Zener	55

I semiconduttori

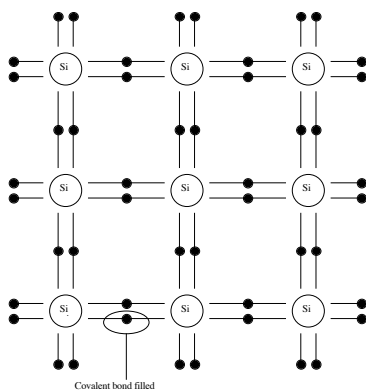
- I materiali per applicazioni elettriche/elettroniche sono generalmente classificati rispetto al valore di resistività.

Materiale	Resistività' ($\Omega\text{-cm}$)
Isolanti	$10^5 < \rho$
Semiconduttori	$10^{-3} < \rho < 10^5$
Conduttori	$\rho < 10^{-3}$

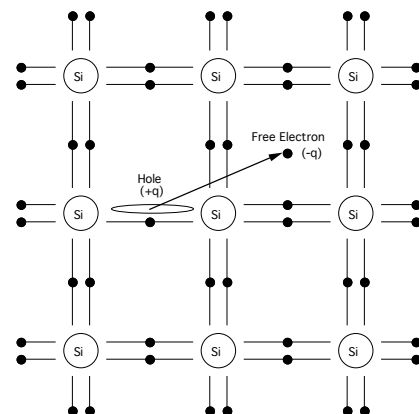
- La conduzione nei conduttori avviene per:
 fenomeno: *trascinamento per campo elettrico*
 portatori di carica: *elettroni*
- La conduzione nei semiconduttori avviene per:
 fenomeno: *trascinamento* (per campo elettrico)
diffusione (per gradiente di concentrazione)
 portatori di carica: *elettroni*
lacune
- Nei semiconduttori i portatori di carica sono gli elettroni e le lacune. Essi si muovono in direzioni opposte. Assumiamo la lacuna come una particella di carica positiva mentre l'elettrone come una particella di carica negativa.
- Abbiamo semiconduttori intrinseci ed estrinseci.

Semiconduttore intrinseco

- I semiconduttori più usati sono Si e Ge.
- Essi sono tetravalenti (4 elettroni di valenza usati per legami covalenti)
- Il loro valore di energy gap (o intervallo proibito) E_g è:
 per il germanio $E_g = 0.72\text{eV}$
 per il silicio $E_g = 1.1\text{eV}$
- In questo tipo di semiconduttore $n = p = n_i$
- La concentrazione dei portatori intrinseci (n_i) dipende dalla temperatura ($n_i^2 = A_0 \cdot T^3 \cdot \exp(E_{g0}/kT)$)



Conduzione in semiconduttori intrinseci



Per agitazione termica (o applicazione di energia dall'esterno) un legame covalente può sciogliersi.

Si viene a creare una coppia elettrone+lacuna.

La lacuna è una mancanza di elettrone che può attirare un elettrone da una posizione vicina dove si sposta la lacuna.

La lacuna ha la stessa carica dell'elettrone, ma con segno opposto (positivo)

In un semiconduttore puro la conduzione è molto bassa, in quanto non è molto agevole sciogliere i legami covalenti

Semiconduttore estrinseco

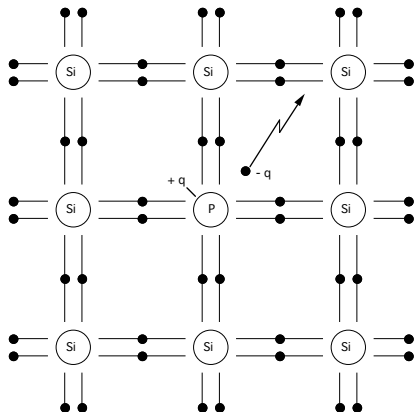
Se si sostituisce un atomo di Si (4 elettroni di valenza) con un atomo di un elemento del III o V gruppo si ottiene un semiconduttore estrinseco o drogato

Nel caso di un elemento del V gruppo come As, P, Sb quattro elettroni di valenza saranno impegnati in legami con il silicio mentre il quinto e' debolmente legato.

E' quindi sufficiente una piccola quantita' di energia (E_r) per rompere questo debole legame e contribuire alla conduzione elettrica:

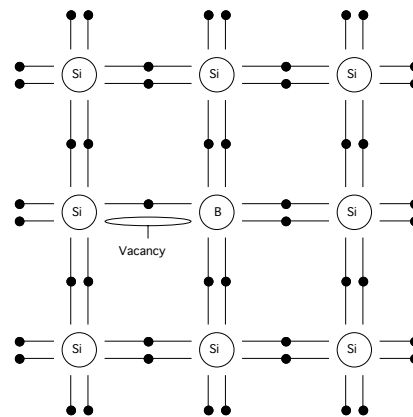
per il silicio $E_r=0.05\text{eV}$; per il germanio $E_r=0.01\text{eV}$

Questi atomi pentavalenti sono detti *donori* ed il materiale si dira' drogato di tipo n.



Semiconduttore estrinseco

- Nel caso degli elementi del III gruppo come B, In, Ga i tre elettroni riempiono tre dei quattro legami covalenti del silicio, lasciandone uno vacante (lacuna).
- E' sufficiente anche in questo caso una piccola energia per contribuire alla conduzione di lacune.
- Questi atomi trivalenti sono detti *accettori* ed il materiale si dira' drogato di tipo p.



Legge dell'azione di massa

In un dato semiconduttore, il prodotto delle densità di elettroni e di lacune all'equilibrio termico e' funzione esclusivamente della temperatura.

$$n \cdot p = n_i^2 \quad \text{con} \quad n_i^2 = A_0 \cdot T^3 \cdot \exp(E_{g0}/kT)$$

Questa legge vale sia per i semiconduttori intrinseci che estrinseci.

Legge della neutralita' di carica

- Nelle regioni di un semiconduttore elettricamente neutre il numero delle cariche positive deve essere bilanciato dal numero di cariche negative.
- Le cariche positive sono associate agli atomi donatori ionizzati ed alla lacune, le seconde sono associate agli accettori ionizzati ed agli elettroni.

$$N_d + p = N_a + n$$

- Pur avendo due elementi carichi, quali gli ioni e le particelle libere, i primi non conducono poiché sono fissi nelle posizioni del reticolo cristallino mentre le seconde conducono corrente.
- Esempio

In un semiconduttore di tipo n gli accettori sono nulli.

Ci sono poche lacune e molti elettroni

La legge di neutralità di carica si esprime come:

$$N_d = n + p \approx n \quad (p \ll n)$$

Se il semiconduttore e' di tipo p invece si avra'

$$N_a = p$$

Correnti in un semiconduttore (I)

Le correnti in un semiconduttore sono di due tipi:

trascinamento o *drift* (per campo elettrico)

diffusione (per gradiente di concentrazione)

Correnti di drift

- In presenza di un campo elettrico E , la corrente risulta essere di *drift* (trascinamento o di deriva) e può essere espressa come:

$$I_{\text{drift}} = n \cdot q \cdot \mu_n \cdot E + p \cdot q \cdot \mu_p \cdot E$$

dove

μ e' la mobilità delle particelle

q e' la carica delle particelle (cioe' dell'elettrone)

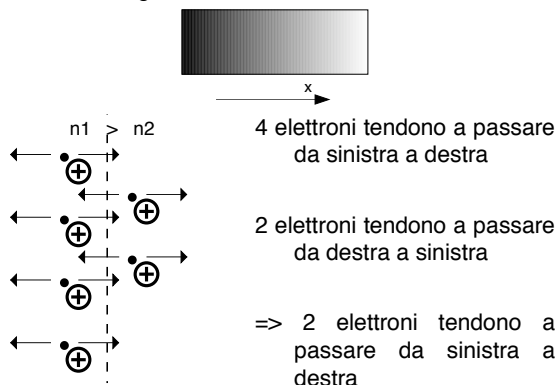
n/p sono la densita' delle particelle

- Le componenti della corrente di drift sono due: una ($n \cdot q \cdot \mu_n \cdot E$) e' dovuta allo spostamento di elettroni, mentre l'altra ($p \cdot q \cdot \mu_p \cdot E$) e' dovuta allo spostamento di lacune
- Dalla meccanica quantistica risulta che $\mu_n \neq \mu_p$ ed in particolar modo $\mu_n \approx 2.5 \mu_p$.
Nel silicio a 300K: $\mu_n \approx 1300 \text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$; $\mu_p \approx 500 \text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$;
- La mobilità e' funzione della temperatura:
 $\mu \propto T^{-m}$
dove $m = 2$ per il Si, e $m = 1.6$ per il Ge
- La conducibilita' (σ) viene definita come:
 $\sigma = n \cdot q \cdot \mu_n + p \cdot q \cdot \mu_p$

Correnti in un semiconduttore (II)

Correnti di diffusione

- Questa corrente ha origine dalle variazioni spaziali della densità del drogante nel semiconduttore



Ad esempio nel caso di un materiale di tipo p si ha :

$$J_p = -q \cdot D_p \cdot \frac{dp}{dx}$$

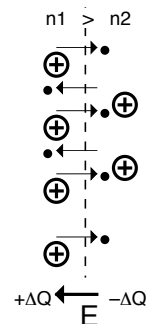
dove $\frac{dp}{dx}$ e' il profilo di drogaggio

La diffusività D_p si ricava dalla relazione di Einstein

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} = V_T = \frac{k \cdot T}{q}$$

$V_T = 25\text{mV}$ a $T=300\text{K}$ e' la tensione termica.

Correnti in un semiconduttore (III)



Allora, la corrente totale per un semiconduttore di tipo p e':

$$J_p = q \cdot \mu_p \cdot p \cdot E - q \cdot D_p \cdot \frac{dp}{dx}$$

per un semiconduttore di tipo n e':

$$J_n = q \cdot \mu_n \cdot n \cdot E + q \cdot D_n \cdot \frac{dn}{dx}$$

In condizioni stazionarie la corrente totale sara' nulla , quindi in un semiconduttore di tipo p si avra':

$$E = \frac{D_p}{p \cdot \mu_p} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow E \neq 0 \text{ per la presenza di un gradiente}$$

Poiché $E = -\frac{dV}{dx}$ allora $dV = -V_T \cdot \frac{dp}{p}$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \exp(V_{21}/V_T)$$

come si vede dalla relazione non c'e' alcuna dipendenza dalle dimensioni del pezzo di silicio.

La giunzione p-n: il diodo

Se in un semiconduttore si droga una regione di tipo p ed una di tipo n si crea una giunzione p-n.

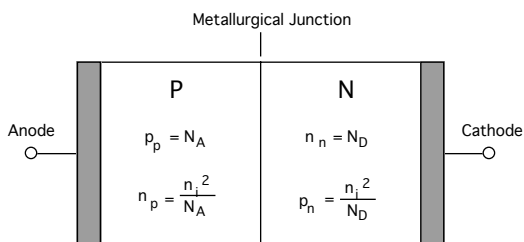
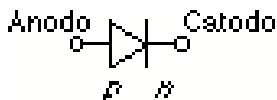


Figure 3.1 - Basic p-n junction diode



- Attraverso la giunzione si manifesta un gradiente del drogaggio
=> le lacune si diffondono nella zona drogata n mentre gli elettroni nella zona p

- In prossimità della giunzione nel materiale di tipo p gli ioni accettori scompaiono per ricombinazione con gli elettroni che diffondono in senso opposto

Analogo e' il discorso per il materiale di tipo n

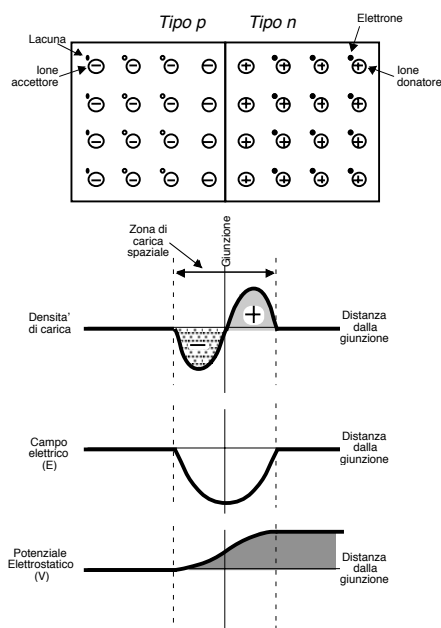
La regione della giunzione e' così svuotata dei portatori di carica mobile e prende il nome di *regione di carica spaziale* o di svuotamento

La lunghezza di questa zona e' tipicamente di di $0.5\mu\text{m}$. A sinistra di questa zona la concentrazione dei portatori vale $p \approx N_A$ mentre a destra vale $n \approx N_D$.

La giunzione p-n: il diodo

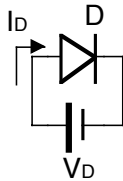
- I grafici illustrano l'andamento della carica, del campo elettrico e del potenziale.

Essi si ottengono a partire da quello della carica tenuto conto che il campo elettrico e' proporzionale all'integrale della densità della carica, mentre il potenziale e' proporzionale all'integrale del campo elettrico.



Polarizzazione del diodo

- Si applichi ora una differenza di potenziale (V_D) ai capi del diodo:



- Si possono avere due casi :

$V_D < 0$ polarizzazione inversa

$V_D \geq 0$ polarizzazione diretta

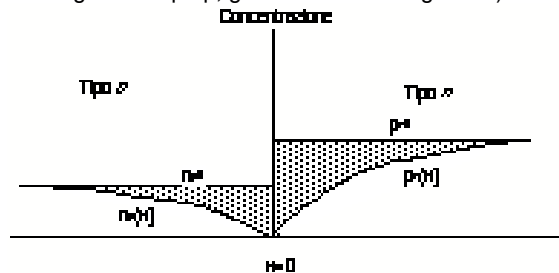
Il diodo assume comportamenti diversi in base alla polarizzazione.

Polarizzazione inversa ($V_D < 0$)

- La polarizzazione e' tale da alzare la differenza di potenziale che si oppone al flusso dei portatori maggioritari (le lacune nella regione di tipo p, gli elettroni nella regione n)

Le lacune diffondono sempre meno dalla regione p alla n e lo stesso vale per gli elettroni

- La polarizzazione e' tale da alzare la differenza di potenziale che si oppone al flusso dei portatori maggioritari (le lacune nella regione di tipo p, gli elettroni nella regione n)



- I portatori minoritari (le lacune nella regione n e gli elettroni nella regione p) non vengono influenzati

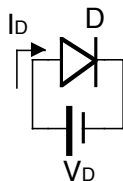
Poiché sono poche le lacune nel lato n la corrente risulta estremamente piccola

Questa piccola corrente viene chiamata *corrente di saturazione inversa*

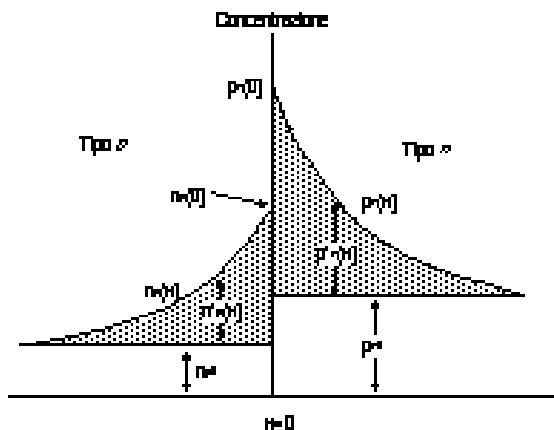
Polarizzazione diretta ($V_D > 0$)

(I)

- La polarizzazione e' tale da abbassare la differenza di potenziale che si oppone alla diffusione dei maggioritari nel parte drogata in maniera opposta
- Le lacune diffondono dalla regione p alla n e viceversa per gli elettroni



Ne risulta una corrente totale che attraversa la giunzione che e' data dalla somma delle delle correnti minoritarie delle lacune e degli elettroni



$$p_n(0) = p_{n0} \cdot \exp(V_D/V_T)$$

$$p_n(x) = p_n(0) \cdot \exp(-x/L_D)$$

$$n_p(x) = n_p(0) \cdot \exp(-x/L_D)$$

Polarizzazione diretta ($V_D > 0$)

(II)

- Le lacune iniettate nel lato n decrescono esponenzialmente con la distanza dalla giunzione in quanto si ricombinano con gli elettroni. Analogo discorso per gli elettroni nel lato p. La densità delle lacune iniettate nel lato n e' dato da:

$$J_p(0) = -q \cdot D_p \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$J_p(0) = q \cdot (D_p/L) \cdot p_{n0} \cdot (\exp(V_D/V_T) - 1)$$

$$I_p(0) = J_p(0) \cdot \text{Area}$$

- Dove per $x = 0$ si intende la fine della regione di carica spaziale nel lato n.
- Quanto detto per le lacune vale anche per gli elettroni iniettati nella regione p.
- Da questa descrizione ci si accorge che il diodo puo' essere utilizzato come raddrizzatore, cioè consente un facile passaggio delle cariche in una direzione mentre lo contrasta nella direzione opposta.

Relazione tensione-corrente

- La relazione tensione-corrente del diodo risulta essere:

$$I_D = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{V_D}{n \cdot V_t}\right) - 1 \right)$$

- $I_s (= A \cdot q \cdot \frac{D_p}{L} \cdot p_{n0})$, ove A e' l' area della sezione del diodo) e' la corrente di saturazione inversa
- Tipicamente n e' tra 1 e 2. Di seguito si usera' $n=1$.
- Il relativo grafico tensione-corrente e' quindi:



Essendo l'andamento esponenziale si può approssimare:

Per $V_D > 0$ (pol. diretta)

$$I_D = I_s \cdot \exp\left(\frac{V_D}{n \cdot V_t}\right)$$

Per $V_D < 0$ (pol. inversa)

$$I_D = -I_s$$

Esercizio

Quanto varia la tensione sul diodo se la corrente viene raddoppiata?

Il valore della tensione sul diodo V_{D1} per un livello di corrente I_{D1} e':

$$V_{D1} = V_t \cdot \ln\left(\frac{I_{D1}}{I_s}\right)$$

Il valore della tensione sul diodo V_{D2} per un livello di corrente $I_{D2} = 2 \cdot I_{D1}$ si può scrivere come:

$$V_{D2} = V_t \cdot \ln\left(\frac{I_{D2}}{I_s}\right) = V_t \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot I_{D1}}{I_s}\right) = V_t \cdot \left(\ln(2) + \ln\left(\frac{I_{D1}}{I_s}\right) \right)$$

$$V_{D2} = V_t \cdot \ln(2) + V_{D1}$$

La variazione di tensione sul diodo si può quindi scrivere come:

$$\Delta V = V_{D2} - V_{D1} = V_t \cdot \ln(2) \approx 18 \text{ mV}$$

Dipendenza dalla temperatura

- La relazione tensione-corrente del diodo risulta essere ($n=1$):

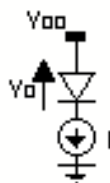
$$I_D = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{V_D}{V_t}\right) - 1 \right)$$

- Essendo $V_t = \frac{k \cdot T}{q}$, esiste una dipendenza diretta del comportamento del diodo dalla temperatura.
- Il comportamento reale (misurato sperimentalmente) si scosta da quello teorico illustrato dalla relazione I-V del diodo.
- Si osserva sperimentalmente che la corrente di saturazione inversa approssimativamente raddoppia per ogni aumento della temperatura di 10° . Cioe':

$$I_0(T) = I_{01} \cdot 2^{(T-T_1)/10}$$

- A temperatura ambiente, con I costante si ha che:

$$\frac{dV_D}{dT} \approx -2.5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$



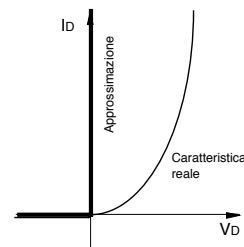
Se T aumenta, allora le particelle sono più libere e hanno bisogno di meno campo elettrico per muoversi.

Relazione tensione-corrente del diodo

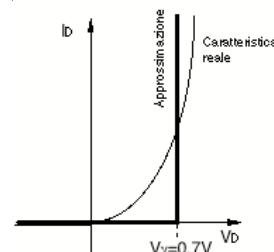
Circuiti approssimati

Per la risoluzione dei circuiti, e' utile effettuare delle approssimazioni.

Diodo ideale: la caratteristica e' approssimata con una rappresentazione lineare a tratti di primo livello:

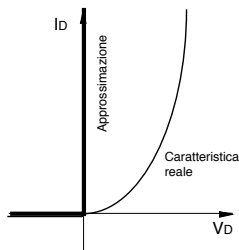


Una migliore approssimazione di secondo livello e':



Il punto angoloso corrisponde alla tensione di soglia pari a $V_Y = 0.7 \text{ V}$.

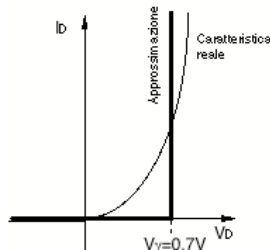
Regioni di funzionamento



OFF
ON

$I_D = 0$
 $I_D > 0$

$V_D < 0V$
 $V_D > 0V$



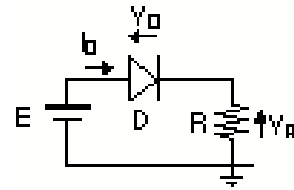
OFF
ON

$I_D = 0$
 $I_D > 0$

$V_D < 0.7 V$
 $V_D > 0.7 V$

Esercizio

Calcolo del punto di lavoro



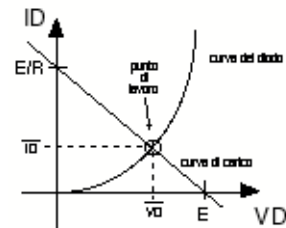
- Risoluzione con metodo grafico (I)

Supponendo $E > 0$

Dal circuito si ricava:

$$E = V_D + V_R = V_D + I_D R$$

$$I_D = (E - V_D) / R \quad (\text{retta di carico})$$



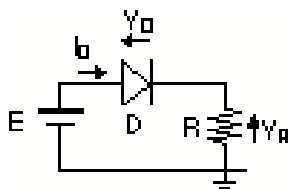
Si interseca la retta di carico con la caratteristica per trovare il punto di lavoro.

Calcolo l'intersezione della retta con gli assi:

$$I_D = 0 \Rightarrow V_D = E$$

$$V_D = 0 \Rightarrow I_D = E/R$$

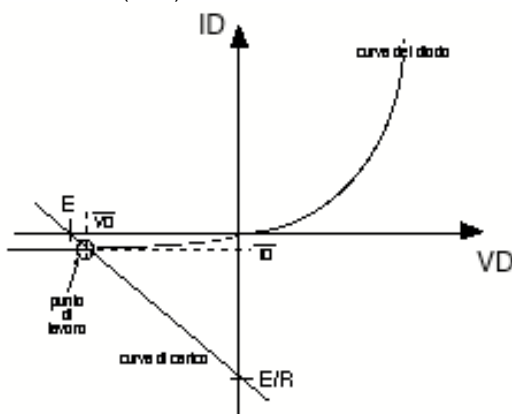
Esercizio



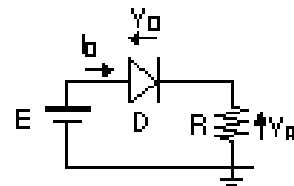
- Risoluzione con metodo grafico

Supponendo $E < 0$

Si traccia la retta di carico e ci si accorge di essere in zona di interdizione (OFF).



Esercizio



- Risoluzione con metodo analitico

Procedura per la risoluzione:

1. Si assume una ipotesi
2. Si risolve l'esercizio
3. Si verifica l'ipotesi

Si consideri per il diodo il modello ideale ($V_D = 0 V$)

Caso 1: $E = 1V$

Essendo I_D positiva, la corrente e' congruente con l'ipotesi fatta $\Rightarrow V_D = 0$, e $I_D > 0$

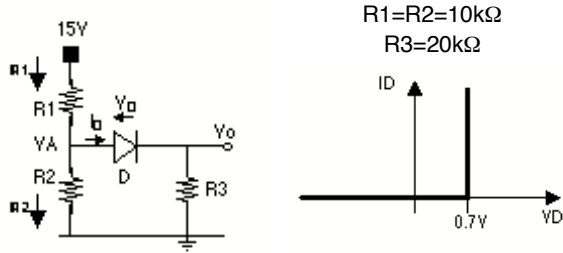
Caso 2: $E = -1V$

La corrente tenderebbe a scorrere da destra verso sinistra e cio' non concorderebbe con il funzionamento del diodo \Rightarrow diodo OFF

- Si provi a valutare il comportamento del circuito per $E = -1$, $E = 0.5V$, ed $E = 1V$ utilizzando l'approssimazione del diodo con $V_T = 0.7V$

Esercizio

Calcolare il punto di lavoro del circuito in figura.



Si fa l'ipotesi che il diodo sia ON

Si scrive quindi la legge di Kirchoff al nodo A:

$$I_{R1} = I_{R2} + I_D$$

$$I_{R1} = \frac{15V - V_A}{R1}$$

$$I_{R2} = \frac{V_A}{R2}$$

$$I_D = \frac{V_A - 0.7V}{R3}$$

$$\frac{15V - V_A}{R1} = \frac{V_A}{R2} + \frac{V_A - 0.7V}{R3}$$

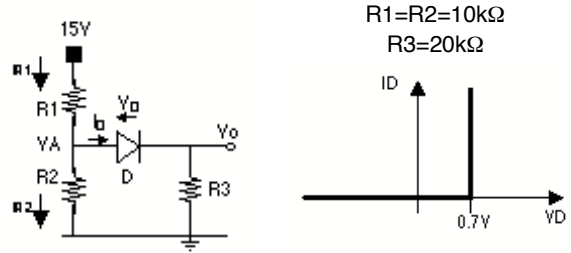
Da qui si ricava

$$V_A = 7.675V$$

e quindi

$$V_o = 6.975V$$

Esercizio



Se si fa l'ipotesi di diodo OFF, a

=> allora $I_D = 0$

e quindi $V_o = 0$

D'altro canto V_A sarebbe risultata dal partitore di $R1$ e $R2$:

$$V_A = 15V \cdot \frac{10k\Omega}{10k\Omega + 10k\Omega} = 7.5V$$

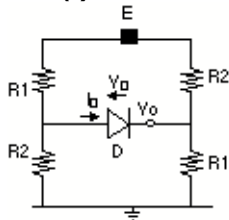
Ai capi del diodo sarebbero caduti:

$$V_D = V_A - V_o = 10V$$

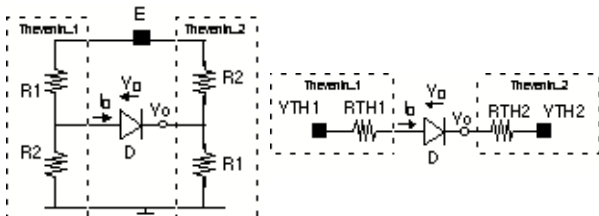
=> l'ipotesi di diodo OFF e' sbagliata

Esercizio (I)

Si estraiga la caratteristica V_o -E del circuito, assumendo $R1 > R2$



Usiamo i circuiti equivalenti di Thevenin e trasformiamo il circuito:



Con:

$$V_{TH1} = E \cdot \frac{R2}{R1+R2}$$

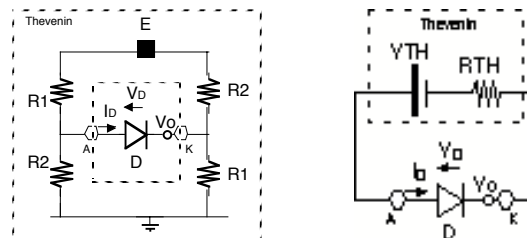
$$R_{TH1} = R1 // R2 = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

$$V_{TH2} = E \cdot \frac{R1}{R1+R2}$$

$$R_{TH2} = R1 // R2 = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

Esercizio (II)

Si puo' anche usare un unico circuito equivalente di Thevenin non riferito a massa



Calcolo di V_{TH}

$$V_A = E \cdot \frac{R2}{R1+R2}$$

$$V_K = E \cdot \frac{R1}{R1+R2}$$

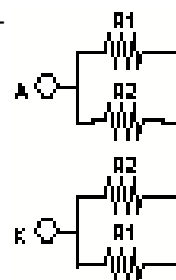
$$\Rightarrow V_{TH} = V_A - V_K = E \cdot \frac{R2 - R1}{R1 + R2}$$

Da notare che il termine $\left(\frac{R2 - R1}{R1 + R2}\right)$ e' sempre negativo (essendo $R2 < R1$).

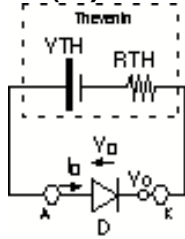
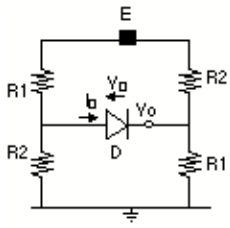
R_{TH} si calcola cortocircuitando E

$$R_{TH} = 2 \cdot (R1 // R2)$$

$$R_{TH} = 2 \cdot \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$



Esercizio (III)



$$R_{TH} = 2 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

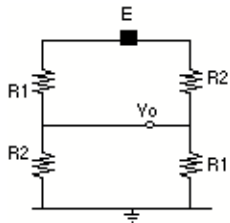
$$V_{TH} = E \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$$

Per $E < 0$ si ha che $V_{TH} > 0V$ ed il diodo e' ON

Pertanto $V_D = 0$ e $I_D = V_{TH}/R_{TH}$

Se il diodo e' ON, opera da corto circuito e il circuito si riduce a:

Si ottiene quindi che:



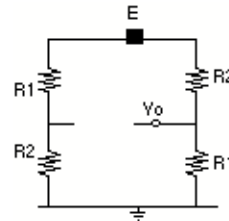
$$V_o = E \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}$$

$$V_o = \frac{E}{2}$$

Esercizio (IV)

Per $E > 0$ si ha che $V_{TH} < 0V$ ed il diodo e' OFF e $I_D = 0$

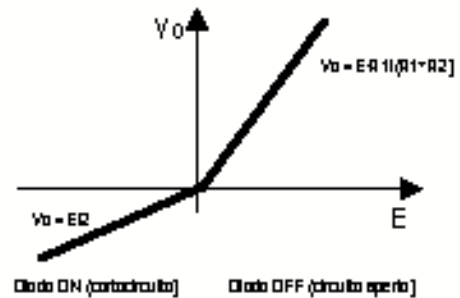
Se il diodo e' OFF, opera da circuito aperto e il circuito si riduce a:



Si ottiene quindi che:

$$V_o = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} > \frac{1}{2}$$

La trascuratissima risulta quindi essere:

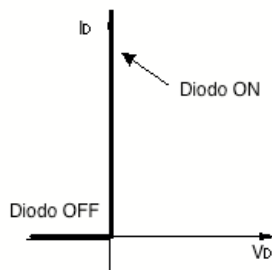


Uso del diodo per grandi segnali

- Si e' visto come il diodo abbia due regioni di funzionamento ben distinte:

Diodo ON : il diodo accetta qualsiasi corrente imposta dal circuito esterno e non dà luogo ad alcuna resistenza ai suoi capi (si comporta quindi da corto-circuito)

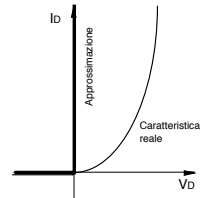
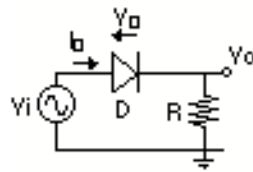
Diodo OFF: il diodo non fa passare alcuna corrente e presenta ai suoi capi qualsiasi tensione imposta da circuito esterno (si comporta quindi da circuito aperto)



Questo comportamento viene sfruttato in circuiti quali:

- Raddrizzatori
- Allungatori di picco
- Circuiti di clamping

Circuiti Raddrizzatori (I)



- Si applichi all'ingresso del circuito in figura una sinusoide centrata a 0V e si consideri l'approssimazione di diodo ideale

Si studiano due casi (come nell'esempio precedente)

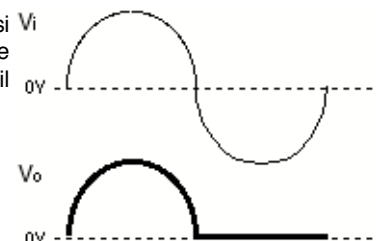
- Per $V_i > 0$, il circuito tende a far scorrere una corrente positiva nel diodo che, quindi, si comporta da corto circuito. Si ha quindi che:

$$V_o = V_i$$

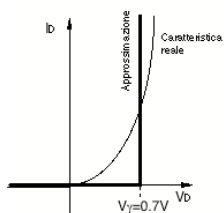
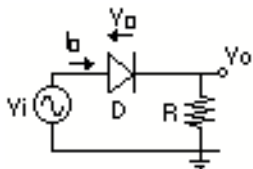
- Per $V_i < 0$, il circuito tende a far scorrere una corrente negativa nel diodo che, quindi, si comporta da circuito aperto. Si ha quindi che:

$$V_o = 0$$

Il grafico che si ottiene per V_i e per V_o e' il seguente:

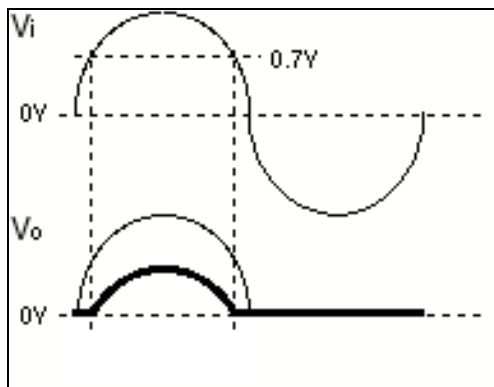


Circuiti Raddrizzatori (II)



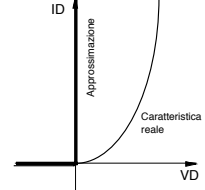
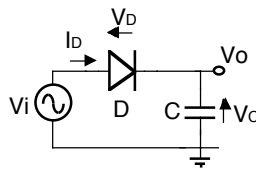
- Si valuti ora il comportamento del circuito utilizzando l'approssimazione del diodo con $V_\gamma = 0.7V$

L'andamento che si ottiene e' illustrato in figura

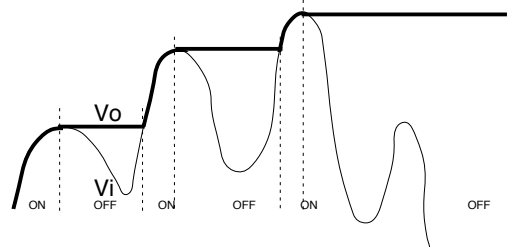


Allungatore di picco

Si valuti l'uscita $V_o(t)$ per un segnale di ingresso variabile. Si assuma per il diodo la caratteristica ideale



Si assuma la forma d'onda in ingresso mostrata in figura con la linea sottile.

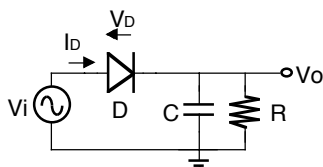


- Istante per istante, se $V_i > V_o$ il diodo e' ON e quindi conduce corrente positiva. Conducendo corrente la tensione ai suoi capi e' nulla e quindi si ha:

$$V_o = V_i$$

- Per $V_i < V_o$ il diodo e' OFF e quindi non conduce corrente. Il diodo si comporta come un circuito aperto e quindi la carica sul condensatore non viene aggiornata. La tensione V_o quindi resta costante al valore che aveva quando si e' aperto il diodo.
- L'andamento di $V_o(t)$ e' tracciato nel grafico con linea spessa.

Allungatore di picco smorzato

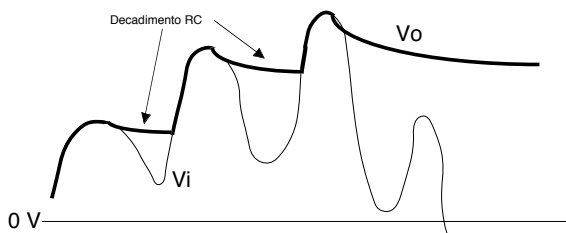


E' stato aggiunto un resistore in parallelo al condensatore

Nella fase di inseguimento il circuito si comporta come prima (a parte una maggior corrente che deve essere erogata dal generatore di segnale)

Nella fase in cui il diodo e' OFF, la carica sul condensatore tende a scaricarsi verso massa attraverso il resistore.

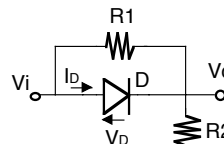
Questo comporta una decadimento esponenziale (con costante di tempo RC) della tensione in uscita.



Da notare che in questo grafico si e' assunto di operare con tensioni in uscita solo positive.

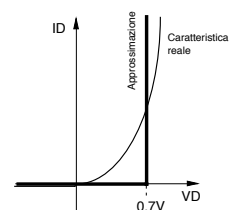
Come sarebbe con tensioni anche negative ?

Esercizio (I)



$$R_1 = R_2 = 1k\Omega$$

$$V_i(t) = 2V \cdot \sin(2\pi \cdot f_{in} \cdot t)$$



L'esercizio va risolto per diversi valori della tensione di ingresso.

Ad esempio si consideri $V_i = 1V$

Si supponga il diodo D ON. Allora $V_D = 0.7V$

Ne segue che

$$V_o = V_i - V_D = 0.3V$$

La corrente su R_1 e':

$$I_{R1} = \frac{V_D}{R_1} = \frac{0.7V}{1k\Omega} = 0.7mA$$

$$I_{R2} = \frac{V_o}{R_2} = \frac{0.3V}{1k\Omega} = 0.3mA$$

$$I_D = I_{R2} - I_{R1} = -0.4mA < 0mA$$

=> il diodo non puo' sostenere tale corrente e quindi l'ipotesi di diodo ON non e' valida.

Si suppone allora il diodo OFF (cioe' il diodo e' come se non ci fosse)

Allora V_o e' dato dal partitore:

$$V_o = V_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1V}{2} = 0.5V$$

Esercizio (II)

Allo stesso modo:

$$V_D = 1V - 0.5V = 0.5V$$

Così si è verificato che per $V_i = 1V$ il diodo è OFF

In maniera più generale si può osservare che se il diodo è ON deve valere:

$$I_D + I_{R1} = I_{R2}$$

con

$$I_D > 0$$

$$I_{R1} = \frac{V_D}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{V_O}{R_2}$$

Inoltre vale la legge di Kirchhoff:

$$V_i = V_D + V_O$$

Si ricava allora:

$$I_D = I_{R2} - I_{R1} = \frac{V_O}{R_2} - \frac{V_D}{R_1}$$

$$I_D = \frac{V_i - V_D}{R_2} - \frac{V_D}{R_1} = \frac{V_i}{R_2} - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) > 0$$

Da ciò (essendo $R_1 = R_2$) si ha che il diodo è acceso per:

$$V_i > 2 \cdot V_D = 1.4V$$

Esercizio (III)

Allora ci sono due regioni separate di funzionamento:

$$V_i < 1.4V$$

$$V_i > 1.4V$$

- Per $V_i < 1.4V$, il diodo è OFF e quindi è come se non ci fosse. Si ha allora:

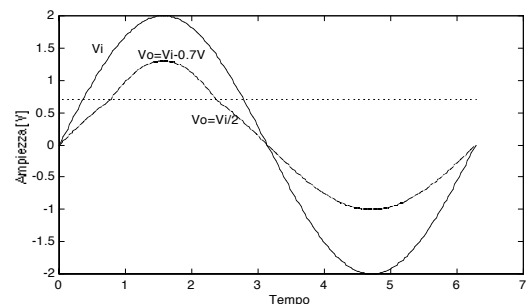
$$V_O = V_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_i}{2}$$

- Per $V_i > 1.4V$, il diodo è ON. Ne segue che $V_D = 0.7V$

e si ha che:

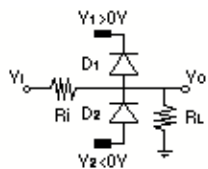
$$V_O = V_i - V_D$$

Il grafico è il seguente:

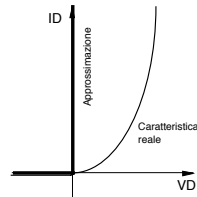


Circuito di clamping (I)

Si valuti l'uscita $V_O(t)$ per un segnale di ingresso sinusoidale di ampiezza 10V



Si assuma per il diodo la caratteristica ideale



$$R_i = R_L = 5k\Omega$$

$$V_1 = 4V \quad V_2 = -4V$$

Si consideri $V_i > 0$. La corrente su D2 tenderebbe comunque ad essere negativa e quindi D2 è OFF.

Ora si faccia l'ipotesi di diodo D1 OFF. Ne consegue che V_O si porta a:

$$V_O = \frac{R_L}{R_i + R_L} \cdot V_i = \frac{1}{2} \cdot V_i$$

L'ipotesi di D1 OFF è valida finché $V_O < V_1$. Ciò corrisponde a $V_i < 2 \cdot V_1 = 8V$.

Quindi per $0 < V_i < 8V$, D1 è OFF e $V_O = \frac{1}{2} \cdot V_i$

Per $8V < V_i$, D1 si accende e diventa un corto-circuito. V_O si porta quindi sempre a $V_1 = 4V$.

Un ragionamento analogo vale per $V_i < 0$. Ciò porta a trovare che si ha:

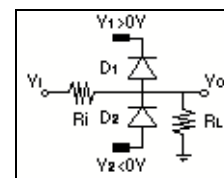
$$\text{Per } -8V < V_i < 0$$

$$V_O = \frac{1}{2} \cdot V_i$$

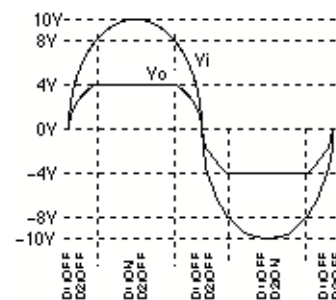
$$\text{Per } V_i < -8V$$

$$V_O = -4V$$

Circuito di clamping (II)



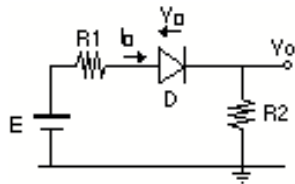
Il grafico dell'evoluzione dei segnali V_i e V_O è il seguente:



- Un circuito di clamping è composto da due diodi che sono tipicamente spenti e si accendono solo nel caso che la tensione di ingresso superi i livelli di tensione a cui i due diodi sono connessi.

Esercizio (I)

Assumendo per il diodo l'approssimazione di diodo ideale ($V_D = 0V$ se acceso), si indichi la caratteristica V_O/E per E tra $-5V$ e $5V$



Si studiano due casi: per $E > 0$ e per $E < 0$.

Per $E > 0$ il diodo conduce $\Rightarrow V_D = 0$ (approssimazione diodo ideale).

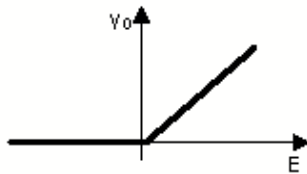
V_O dipende da E secondo la relazione:

$$V_O = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

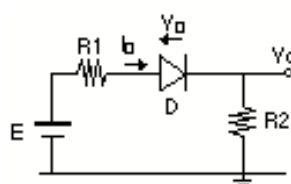
Per $E < 0$ il diodo è OFF $\Rightarrow I = 0$

$$V_O = 0$$

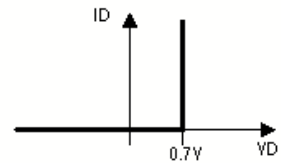
La caratteristica risulta essere:



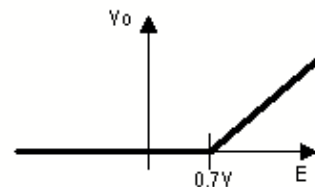
Esercizio (II)



Se si considera il diodo approssimato con $0.7V$



La caratteristica che ne risulta è la seguente:



Circuito equivalente per piccoli segnali

- La caratteristica a largo segnale del diodo (più o meno approssimata) è:
 - di tipo trascendente ($I = I_s \cdot \exp(V_{BE}/V_t)$) e quindi di difficile maneggiabilità
 - approssimata (spezzata) e quindi di scarsa precisione
- Si vorrebbe una descrizione LINEARE del comportamento del diodo e di tutti i componenti lineari e non di un circuito.
 - Si opera con un sistema lineare:
 - È utile per fare calcoli a mano
 - È utile per fare calcoli con i calcolatori
- Il problema è avere un modello lineare per tutti i componenti.

Con le serie di Taylor si approssima con un modello lineare il comportamento di ciascun componente per piccole escursioni (segnali) attorno ad un determinato punto (punto di lavoro).

$$V_D = V_{D0} + v_{Ds} = V_{D0} + \left. \frac{\partial V_D}{\partial I} \right|_{V_{D0}} \cdot dI + \text{term. ord. superiore}$$

Per un piccolo segnale (v_{Ds}), l'equazione diventa:

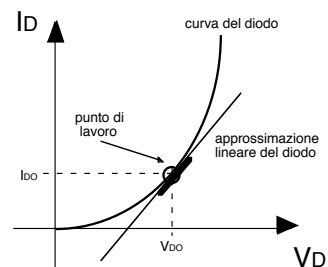
$$v_{Ds} = \left. \frac{\partial V_D}{\partial I} \right|_{V_{D0}} \cdot dI$$

Si ottiene una relazione lineare tra tensione di segnale (v_{Ds}) e corrente di segnale (dI)

- Tale modello vale finché l'errore che si commette nel trascurare i termini di ordine superiore (term. ord. superiore) è inferiore ad una data precisione che si vuole ottenere.

Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Il diodo è intrinsecamente non lineare per ampi segnali.



- Si può pensare di sovrapporre al punto di lavoro (V_{D0} , I_{D0}) un segnale v_D molto piccolo in modo che nell'escursione di v_D la caratteristica del diodo possa essere bene approssimata con una retta

$$V_D(I_D) = V_{D0}(I_{D0}) + v_D = V_{D0} + \left. \frac{\partial V_D}{\partial I_D} \right|_{V_{D0}} \cdot i_D \quad \begin{array}{l} \text{termini di} \\ \text{ordine} \\ \text{superiore} \end{array}$$

+

$$I_D = I_{D0} + i_D$$

Per un piccolo segnale (v_D , i_D), l'equazione diventa quindi:

$$v_D = \left. \frac{\partial V_D}{\partial I_D} \right|_{V_{D0}} \cdot i_D$$

Guadagno per piccolo segnale

- Per calcolare il guadagno per un piccolo segnale in ingresso e' necessario disegnare il circuito equivalente per piccolo segnale sostituendo ad ogni componente il suo circuito equivalente per piccolo segnale.

Circuiti equivalenti per piccolo segnale

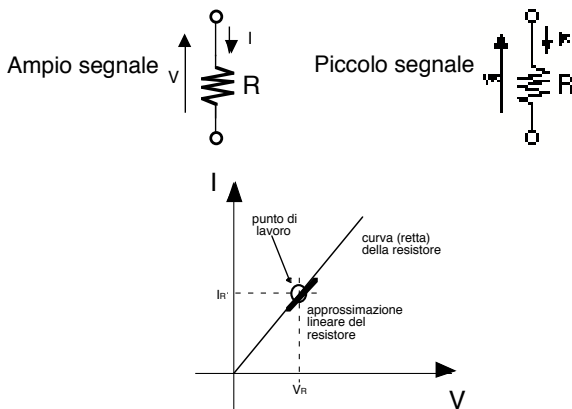
- Resistore

$$V = R \cdot I$$

$$V_R + v_R = R \cdot (I_R + i_R) = R \cdot I_R + R \cdot i_R$$

$$V_T(I_T) = V_O(I_O) + v_i = V_O + \frac{\partial V_T}{\partial I_T} \Big|_{V_O} \cdot i_i$$

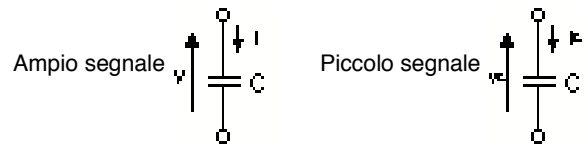
$$v_R = R \cdot i_R$$



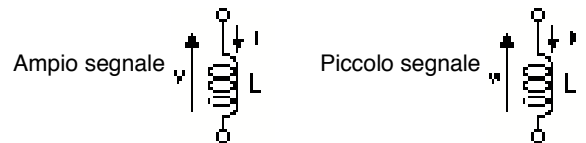
Circuiti equivalenti per piccolo segnale

Componenti passivi

- Condensatore



- Induttore



Circuiti equivalenti per piccolo segnale

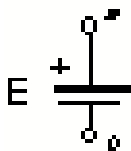
Componenti attivi

$$V_T(I_T) = V_O(I_O) + v_i = V_O + \frac{\partial V_T}{\partial I_T} \Big|_{V_O} \cdot i_i$$

- Generatore di polarizzazione

$$\text{Tensione (E)} \left(\frac{\partial V_T}{\partial I_T} = 0 \right)$$

Ampio segnale

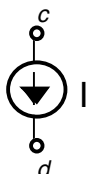


Piccolo segnale



$$\text{Corrente (I)} \left(\frac{\partial V_T}{\partial I_T} = \infty \right)$$

Ampio segnale



Piccolo segnale

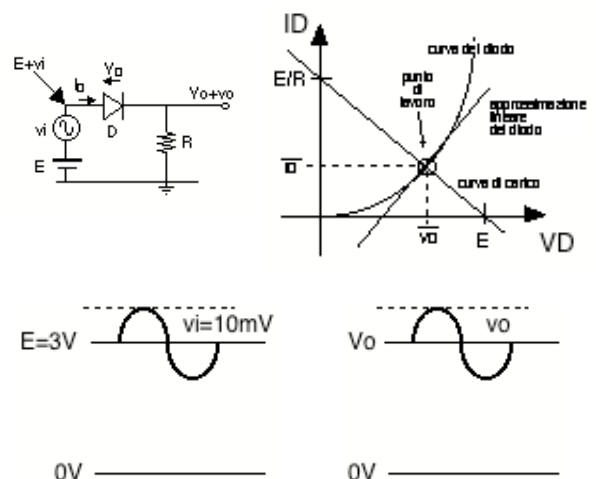


- Generatore di segnale

I generatori di segnale di tensione/corrente rimangono immutati

Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Guadagno di piccolo segnale

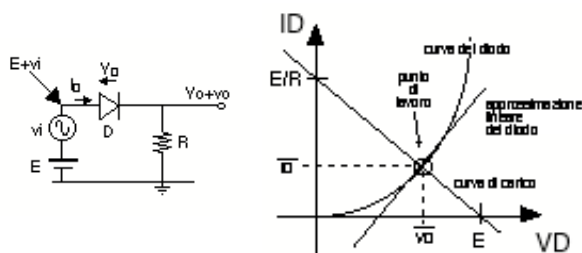


Si definisce GUADAGNO il rapporto:

$$\text{GUADAGNO} = \frac{V_O}{V_i}$$

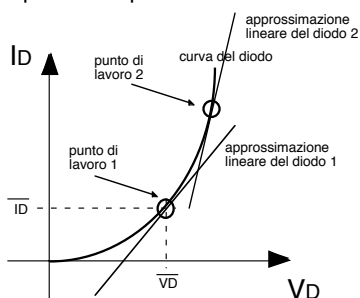
Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Guadagno di piccolo segnale



Il circuito equivalente del diodo per piccolo segnale e' una resistenza che corrisponde alla pendenza mostrata in figura (approssimazione lineare del diodo).

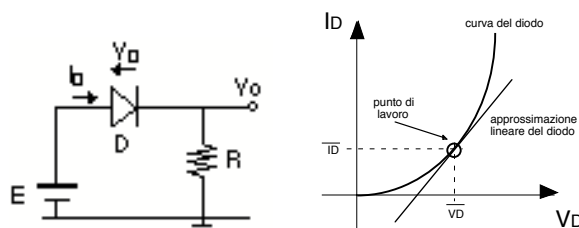
La pendenza dipende dal punto di lavoro



Bisogna quindi calcolare prima il punto di lavoro (con $v_i=0$) e poi valutare il circuito equivalente.

Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Calcolo della polarizzazione



Il diodo per piccolo segnale corrisponde ad una resistenza r_e pari a:

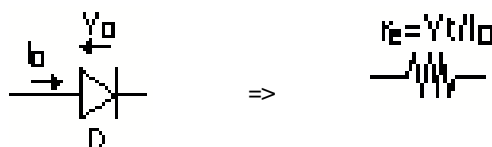
$$r_e = \left(\frac{dI_D}{dV_D} \right)^{-1}$$

$$r_e = \left(\frac{dI_D}{dV_D} \right)^{-1}_{I_D=I_{D0}} = \left(\frac{d}{dV_D} (I_s \exp(V_D/V_t)) \right)^{-1} = \left(\frac{I_D}{V_t} \right)^{-1} = \frac{V_t}{I_D}$$

$$r_e = \frac{V_t}{I_D}$$

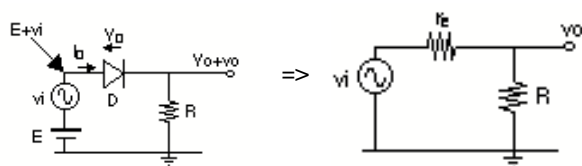
- r_e corrisponde all'inverso pendenza delle curva del diodo calcolata nel punto di lavoro
- per polarizzazione inversa la relazione vale ancora.

Ovviamente, essendo I_D molto piccola (tendente a 0), ne consegue che r_e tende all'infinito, cioe' al circuito aperto



Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Sostituendo il diodo



Si ha solo il generatore di segnale (v_i) e solo il segnale in uscita (v_o)

Si e' passati ad un circuito completamente lineare

Si puo' calcolare facilmente il guadagno di piccolo segnale:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + r_e}$$

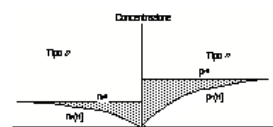
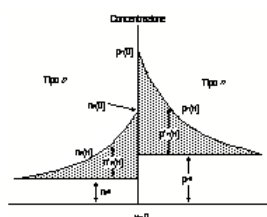
Ricordando che r_e dipende dal punto di lavoro, anche il guadagno di piccolo segnale (v_o/v_i) dipende dal punto di lavoro, anche se non appare direttamente nell'espressione precedente

Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

In realta' il diodo opera con una quantita' di carica immagazzinata sulle sue armature.

Polarizzazione diretta

Polarizzazione inversa



Questa quantita' di carica dipende dalla tensione applicata ai capi del diodo.

Variando la tensione di una quantita' piccola (ΔV), si ha una variazione di carica immagazzinata (ΔQ). Pertanto, il diodo per piccoli segnali ha anche un comportamento capacitivo.

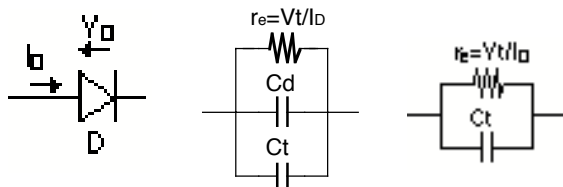
$$C_{\text{diodo}} = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Circuito equivalente per piccoli segnali del diodo

Essendo diverso il comportamento del diodo per polarizzazione diretta o inversa, si hanno due diversi circuiti equivalenti per piccolo segnale a seconda delle condizioni di polarizzazione del diodo.

Polarizzazione diretta

Polarizzazione inversa



$$C_t \ll C_d = \frac{\tau}{r_e}$$

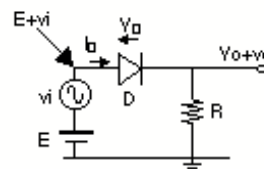
τ e' il tempo di vita medio dei portatori

C_d : capacita' di diffusione

C_t : capacita' di transizione

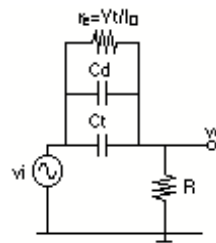
- Le capacita' hanno effetto solo se viene considerato il comportamento in frequenza del circuito (in continua sono dei circuiti aperti)

Esercizio



Per la polarizzazione il circuito si risolve come prima.

Si disegna quindi il circuito equivalente per piccoli segnali



Da cio' si puo' ricavare l'espressione del guadagno v_o/v_i :

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + \frac{r_e}{1 + s \cdot r_e \cdot (C_d + C_t)}} =$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + r_e} \cdot \frac{1 + s \cdot r_e \cdot (C_d + C_t)}{1 + s \cdot \frac{R \cdot r_e}{R + r_e} \cdot (C_d + C_t)}$$

Esercizio

Se ne tracciano allora i diagrammi di Bode

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R}{R + r_e} \cdot \frac{1 + s \cdot r_e \cdot (C_d + C_t)}{1 + s \cdot \frac{R \cdot r_e}{R + r_e} \cdot (C_d + C_t)}$$

C'e' un polo

$$s_p = -\frac{R \cdot r_e}{R + r_e} \cdot (C_d + C_t) \Rightarrow \tau_p = \frac{1}{\frac{R \cdot r_e}{R + r_e} \cdot (C_d + C_t)}$$

C'e' uno zero

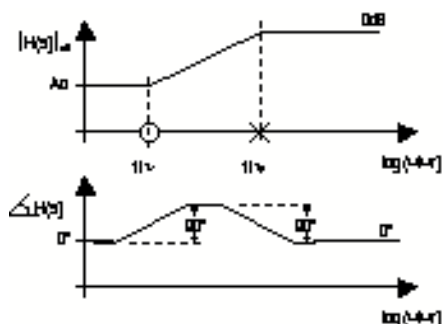
$$s_z = -r_e \cdot (C_d + C_t) \Rightarrow \tau_z = \frac{1}{r_e \cdot (C_d + C_t)}$$

Guadagno in continua

$$A_o = \frac{v_o}{v_i}(s=0) = \frac{R}{R + r_e}$$

Guadagno per $s \rightarrow \infty$

$$A_o = \frac{v_o}{v_i}(s=\infty) = 1 \text{ (0dB)}$$



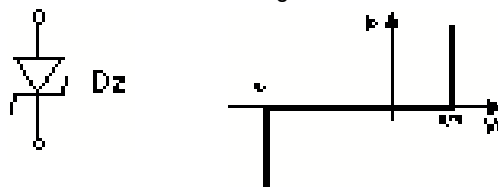
- Si risolve l'esercizio per $E = -3V$

Il diodo Zener

Per un'alta tensione inversa di polarizzazione si verifica un forte aumento della corrente inversa nel diodo. Cio' e' dovuto a due effetti fondamentali:

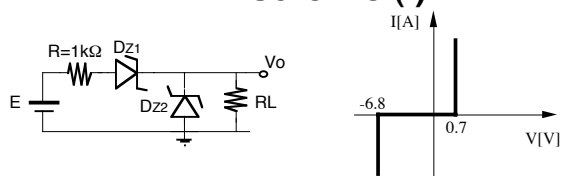
- un portatore e' fortemente accelerato dal campo elettrico inverso e quando va a sbattere contro una coppia elettrone-lacuna cede sufficiente energia da liberare la coppia
- il campo elettrico inverso e' sufficientemente alto da fornire ad una coppia elettrone-lacuna energia sufficiente da sciogliere il legame della coppia

Cio' che si ottiene e' un diodo ZENER il cui simbolo e la cui caratteristica sono mostrati in figura:



I diodi Zener sono utilizzati nei regolatori di tensione

Esercizio (I)



Determinare le correnti nei rami e le tensioni ai nodi nel circuito per $E=10V$ e

- a) $R_L = 1k\Omega$
b) $R_L = 10k\Omega$

a.

Ipotesi: passa un po' di corrente inversa in DZ2.

Ne consegue che:

$$V_o = 6.8V$$

Quindi:

$$I_{RL} = V_o / R_L = 6.8mA$$

Vale la legge di Kirchhoff per le correnti, quindi che $I_{DZ1} = I_{DZ2} + I_{RL}$ e' una corrente diretta diversa da zero. Ne consegue che

$$V_{DZ1} = 0.7V$$

Posso ricavare ora la tensione V_R su R:

$$V_R = E - V_{DZ1} - V_o = 2.5V$$

La corrente che passerebbe sarebbe allora data da:

$$I_R = V_R / R = 2.5mA$$

Vale d'altro canto la relazione

$$I_R = I_{RL} + I_{DZ2}$$

Otengo quindi un assurdo in quanto

$$I_R (=2.5mA) = I_{RL} (=6.8mA) + I_{DZ2} (>0) \text{ e' falso}$$

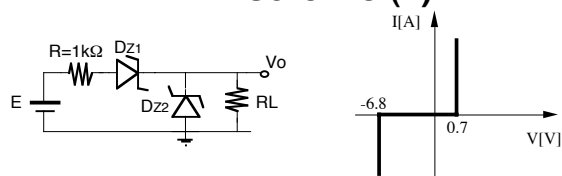
Ne consegue che in DZ2 non passa corrente inversa. La corrente e' allora determinata da:

$$I = \frac{E - V_{DZ1}}{R + R_L} = 4.65mA$$

e V_o e' data da

$$V_o = R_L I = 4.65V$$

Esercizio (II)



In tutto il ragionamento e' stata fatta l'ipotesi sottintesa che in DZ1 passi una corrente diretta, quindi la sua tensione e' fissa a 0.7. Se si fosse supposto che passasse una corrente inversa ne sarebbe derivato un assurdo.

b.

Ipotesi: passa un po' di corrente inversa in DZ2.

Ne consegue che:

$$V_o = 6.8V$$

Quindi:

$$I_{RL} = V_o / R_L = 0.68mA$$

Vale la legge di Kirchhoff per le correnti, quindi che $I_{DZ1} = I_{DZ2} + I_{RL}$ e' una corrente diretta diversa da zero. Ne consegue che

$$V_{DZ1} = 0.7V$$

Posso ricavare ora la tensione V_R su R:

$$V_R = E - V_{DZ1} - V_o = 2.5V$$

La corrente che passerebbe sarebbe allora data da:

$$I_R = V_R / R = 2.5mA$$

Vale d'altro canto la relazione

$$I_R = I_{RL} + I_{DZ2}$$

Otengo questa volta una relazione vera in quanto

$$I_R (=2.5mA) = I_{RL} (=0.68mA) + I_{DZ2} (>0)$$

Ne consegue che in DZ2 passa corrente inversa pari a

$$I_{DZ2} = I_R - I_{RL} = 1.82mA$$

e V_o e' data da:

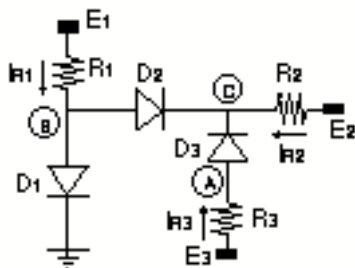
$$V_o = 6.8V$$

Esercizio (I)

Il circuito in figura contiene diodi ideali; i resistori sono uguali tra loro e pari a $1.2k\Omega$.

Si determini la tensione al nodo A specificando lo stato (acceso/spento) di ciascun diodo, nelle seguenti condizioni:

- a - $E_1 = 10V$; $E_2 = 5V$; $E_3 = 10V$;
b - $E_1 = 10V$; $E_2 = -15V$; $E_3 = 10V$.



a.

Si faccia l'ipotesi che tutti i diodi siano accesi.

Poiché i diodi sono ideali, la caduta di tensione su di essi e' nulla.

La tensione al nodo B e' zero, e sono nulle anche le tensioni al nodo C e al nodo A.

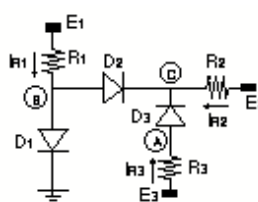
Le correnti nelle tre resistenze sono:

$$I_{R1} = \frac{E_1}{R_1} = 8.33mA$$

$$I_{R2} = \frac{E_2}{R_2} = 4.17mA$$

$$I_{R3} = \frac{E_3}{R_3} = 8.33mA$$

Esercizio (II)



Le correnti nei diodi sono:

$$I_{D3} = I_{R3} = 8.33mA$$

$$I_{D2} = -(I_{R2} + I_{R3}) = -12.5mA$$

$$I_{D1} = I_{R1} - I_{D2} = 20.83mA$$

Per l'ipotesi fatta, la corrente in D2 non può essere negativa.

L'ipotesi che tutti e tre i diodi fossero accesi e' da scartare.

- Ipotesi: D1 e D3 sono accesi, mentre D2 e' spento.

Tale nuova ipotesi appare ragionevole, in quanto non si e' trovata alcuna argomentazione contraria al fatto che D1 e D3 fossero accesi.

La tensione al nodo B e' nulla, mentre le tensioni ai nodi A e C sono uguali e la corrente in D2 e' nulla. Pertanto:

$$I_{R1} = I_{D1} = \frac{E_1}{R_1} = 8.33mA$$

$$I_{R3} = I_{D3} = -I_{R2} = \frac{E_3 - E_2}{R_3 + R_2} = 2.08mA$$

La soluzione trovata non contraddice l'ipotesi di partenza e pertanto e' corretta. La tensione al nodo A e':

$$V_A = E_3 - R_3 \cdot I_3 = 7.5V$$

Esercizio (III)

b.

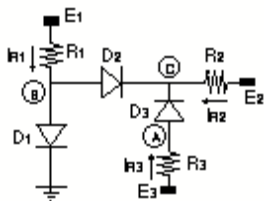
Ipotesi: tutti i diodi siano accesi.

Le tensioni ai nodi A, B e C sono nulle. Le correnti nelle tre resistenze sono:

$$I_{R1} = \frac{E_1}{R_1} = 8.33 \text{ mA}$$

$$I_{R2} = \frac{E_2}{R_2} = -12.5 \text{ mA}$$

$$I_{R3} = \frac{E_3}{R_3} = 8.33 \text{ mA}$$



Le correnti nei diodi sono:

$$I_{D3} = I_{R3} = 8.33 \text{ mA}$$

$$I_{D2} = -(I_{R2} + I_{R3}) = 4.17 \text{ mA}$$

$$I_{D1} = I_{R1} - I_{D2} = 4.17 \text{ mA}$$

La soluzione trovata non contraddice l'ipotesi di partenza e pertanto e' corretta, e la tensione al nodo A e' :

$$V_A = 0 \text{ V}$$

Capitolo III

Il transistor bipolare

Indice

Il transistor bipolare	2
Funzionamento in regione attiva	3
La polarizzazione del transistor bipolare	6
L'impedenza differenziale	13
Il circuito equivalente per piccolo segnale	17
Stadi di guadagno con un transistor	20
L'inseguitore di emettitore	21
Lo stadio a base comune	49
Lo stadio a emettitore comune	57
Impedenze di ingresso di un transistor bipolare	78

Il transistor bipolare

Il transistor bipolare e' un dispositivo a tre morsetti.

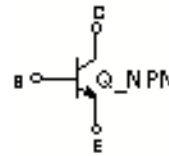
Emettitore

Base

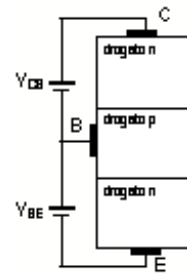
Collettore

Esistono due tipi di transistor bipolare:

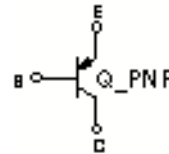
- Transistor NPN



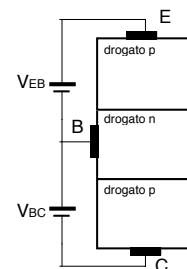
I portatori sono elettroni



- Transistor PNP



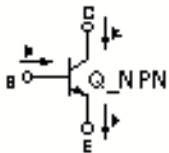
I portatori sono lacune



Funzionamento in regione attiva

Un transistor bipolare opera in regione attiva se:

- Transistor NPN $V_{BE} > 0 \text{ V}$



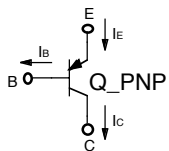
$$(V_{BE} \approx 0.7 \text{ V})$$

$$V_{CB} > 0 \text{ V}$$

$$I_B + I_C = I_E$$

$$I_C = I_S \cdot \exp(V_{BE}/V_T)$$

- Transistor PNP $V_{EB} > 0 \text{ V}$



$$(V_{EB} \approx 0.7 \text{ V})$$

$$V_{BC} > 0 \text{ V}$$

$$I_E = I_B + I_C$$

$$I_C = I_S \cdot \exp(V_{EB}/V_T)$$

Relazioni tra le correnti:

$$I_C = \alpha \cdot I_E$$

$$I_B = I_E - I_C = I_C \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot I_C = \frac{1}{\beta} \cdot I_C$$

$$I_C = \beta \cdot I_B$$

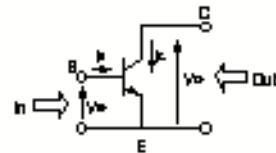
Valori tipici:

$$\alpha = 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 100$$

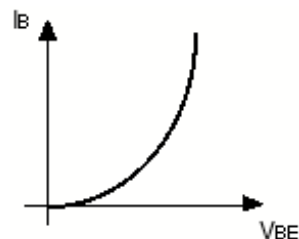
Effetto della temperatura (come nel diodo):

$$\frac{dV_{BE}}{dT} \approx -2.5 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

Le caratteristiche di un transistor



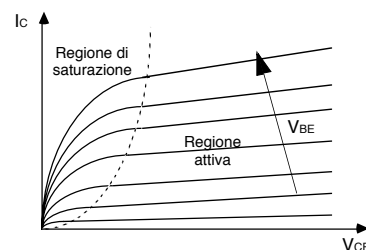
La caratteristica di ingresso



$$I_B = \frac{I_S}{\beta} \cdot \exp(V_{BE}/V_T)$$

- Il transistor e' spento per $V_{BE} < 0.7 \text{ V}$
- E' molto *non-lineare*

La caratteristica di uscita

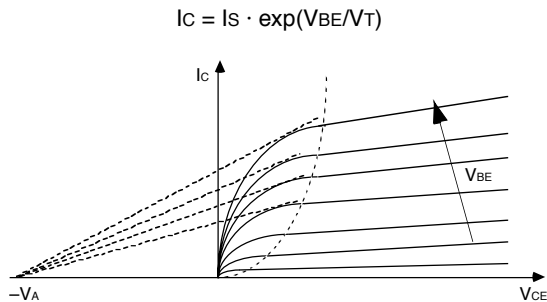


Il transistor entra in regione di saturazione se, fissata la V_{BE} , si forza $V_{CE} < V_{CEsat}$

- Valore tipico: $V_{CEsat} \approx 0.3 \text{ V}$ (cioe' con la giunzione CB leggermente polarizzata in diretta)

L' effetto Early

L'espressione della corrente in regione attiva non dimostra la variazione della corrente al variare di V_{CE} in regione attiva.



- L'espressione della corrente in regione attiva viene quindi modificata come non dimostra la variazione della corrente al variare di V_{CE} in regione attiva.

$$I_C = I_S \cdot \exp(V_{BE}/V_T) \cdot \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right)$$

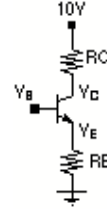
- V_A e' la tensione di Early
Valore tipico: $V_A = 100V$
- L'andamento della curva in regione attiva e' molto *'lineare'*

La polarizzazione del transistor bipolare

Per analizzare la polarizzazione di un circuito (cioe' il punto di lavoro) e' necessario:

1. Fare un' ipotesi di regione di funzionamento del dispositivo attivo (transistor)
2. Risolvere l' esercizio
3. Verificare l' ipotesi

Esempio 1



$$\begin{aligned}\beta &= 100 \\ V_B &= 4V \\ R_C &= 4.7k\Omega \\ R_E &= 3.3k\Omega \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\beta}{\beta+1} = 0.99\end{aligned}$$

Ipotesi: il transistor NPN opera in regione attiva ($V_{BE}=0.7V$)

$$V_E = V_B - V_{BE} = 3.3V$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = 1mA \quad \Rightarrow \quad I_C = \alpha \cdot I_E = 0.99mA$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = 0.01mA$$

$$V_C = 10V - R_C \cdot I_C \approx 5.3V$$

Si verifica ora la validita' dell'ipotesi:

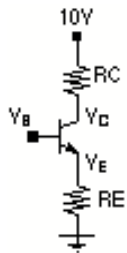
$$V_{CB} = 5.3V - 4V = 1.3V > 0V$$

La giunzione BC e' polarizzata in inversa e l'ipotesi e' valida.

*** Quesito: quale e' il valore massimo di R_C per cui il transistor opera ancora in regione attiva ($R_{C\max}=6k\Omega$)

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 2



$$\begin{aligned}\beta &= 100 \\ V_B &= 6V \\ R_C &= 4.7k\Omega \\ R_E &= 3.3k\Omega \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\beta}{\beta+1} = 0.99\end{aligned}$$

Ipotesi: il transistor NPN opera in regione attiva

$$\Rightarrow V_{BE} = 0.7V$$

$$V_E = V_B - V_{BE} = 5.3V$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = 1.6mA$$

$$I_C = \alpha \cdot I_E = 1.59mA$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = 0.015mA$$

$$V_C = 10V - R_C \cdot I_C \approx 2.48V$$

Si verifica ora la validita' dell'ipotesi:

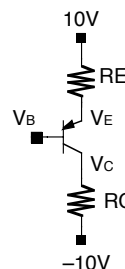
$$V_{CB} = 2.48V - 6V = 3.52V < 0V$$

Quindi la giunzione BC e' polarizzata in diretta e l'ipotesi e' di operazione in regione attiva e' falsa

*** Quesito: quale e' il valore massimo di V_B per cui il transistor opera ancora in regione attiva ($V_{B\max}=4.53V$)

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 3



$$\begin{aligned}\beta &= 100 \\ V_B &= 0V \\ R_C &= 1k\Omega \\ R_E &= 2k\Omega \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\beta}{\beta+1} = 0.99\end{aligned}$$

Ipotesi: il transistor PNP opera in regione attiva

$$\Rightarrow V_{EB} = 0.7V$$

$$V_E = V_B + V_{EB} = 0.7V$$

$$I_E = \frac{10V - V_E}{R_E} = 4.65mA$$

$$I_C = \alpha \cdot I_E = 4.60mA$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = 0.05mA$$

$$V_C = -10V + R_C \cdot I_C \approx -5.4V$$

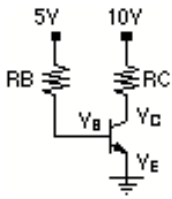
Si verifica ora la validita' dell'ipotesi:

$$V_{BC} = 0V - (-5.4V) = 5.4V > 0V$$

Quindi la giunzione BC e' polarizzata in inversa e l'ipotesi e' valida

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 4



$$\beta = 100$$

$$R_B = 100\text{k}\Omega$$

$$R_C = 2\text{k}\Omega$$

=>

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} = 0.99$$

Ipotesi: il transistor NPN opera in regione attiva

$$\Rightarrow V_{BE} = 0.7\text{V}$$

$$V_B = 0.7\text{V}$$

$$I_B = \frac{5\text{V} - V_B}{R_B} = 0.043\text{mA}$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 4.3\text{mA}$$

$$I_E = I_C + I_B \approx 4.343\text{mA}$$

$$V_C = 10\text{V} - R_C \cdot I_C \approx 1.4\text{V}$$

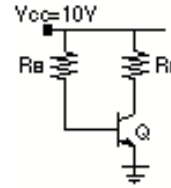
Si verifica ora la validita' dell'ipotesi:

$$V_{CB} = 1.4\text{V} - 0.7\text{V} = 1.4\text{V} > 0\text{V}$$

Quindi la giunzione BC e' polarizzata in inversa e l'ipotesi e' valida.

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 4-bis



$$\beta = 100$$

$$R_B = 200\text{k}\Omega$$

$$R_C = 1.8\text{k}\Omega$$

=>

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} = 0.99$$

- Il circuito diventa interessante quando si puo' usare un'unica tensione di alimentazione per polarizzare il transistor

Ipotesi: il transistor NPN opera in regione attiva ($V_{BE} = 0.7\text{V}$)

$$V_B = 0.7\text{V}$$

$$I_B = \frac{10\text{V} - V_B}{R_B} = 0.0465\text{mA}$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 4.65\text{mA}$$

$$I_E = I_C + I_B = 4.6965\text{mA}$$

$$V_C = 10\text{V} - R_C \cdot I_C \approx 1.5463\text{V}$$

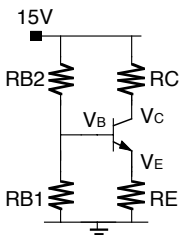
Si verifica ora la validita' dell'ipotesi:

$$V_{CB} = 1.4\text{V} - 0.7\text{V} = 1.4\text{V} > 0\text{V}$$

Quindi la giunzione BC e' polarizzata in inversa e l'ipotesi e' valida.

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 5



$$\beta = 100$$

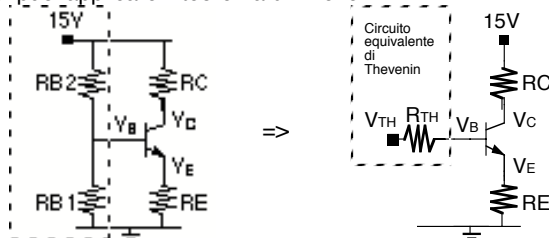
$$R_{B1} = 100\text{k}\Omega$$

$$R_{B2} = 50\text{k}\Omega$$

$$R_C = 1\text{k}\Omega$$

$$R_E = 3\text{k}\Omega$$

Si puo' applicare il teorema di Thevenin



- Si calcolano i parametri del circuito equivalente di Thevenin:

$$V_{TH} = 15\text{V} \cdot \frac{R_{B1}}{R_{B1}+R_{B2}} = 10\text{V}$$

$$R_{TH} = \frac{R_{B1} \cdot R_{B2}}{R_{B1}+R_{B2}} = 33.3\text{k}\Omega$$

Esempio 5 (II)

- Si fa l'ipotesi di operazioni in regione attiva ($V_{BE} = 0.7\text{V}$)
- Si scrive l'equazione di Kirchhoff alla maglia:

$$V_{TH} = R_{TH} \cdot I_B + V_{BE} + R_E \cdot I_E$$

$$I_E = I_C + I_B = \beta \cdot I_B + I_B = (\beta+1) \cdot I_B$$

$$V_{TH} = R_{TH} \cdot I_B + V_{BE} + R_E \cdot (\beta+1) \cdot I_B$$

$$I_B = \frac{V_{TH} - V_{BE}}{R_{TH} + R_E \cdot (\beta+1)} = 27.6\mu\text{A}$$

$$V_B = V_{TH} - I_B \cdot R_{TH} = 9.08\text{V}$$

$$I_E = (\beta+1) \cdot I_B = 27.9\text{mA}$$

$$V_E = R_E \cdot I_E = 3\text{k}\Omega \cdot 2.83\text{mA} = 8.38\text{V}$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 27.65\text{mA}$$

$$V_C = 15\text{V} - I_C \cdot R_C = -12.23\text{V}$$

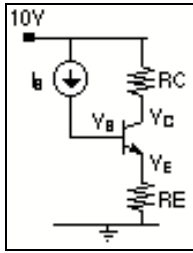
Si puo' infine calcolare

$$I_{RB2} = \frac{15\text{V} - V_B}{R_{B2}} = 118.43\mu\text{A}$$

$$I_{RB1} = \frac{V_B}{R_{B1}} = 90.78\mu\text{A}$$

La polarizzazione del transistor bipolare

Esempio 6



$$R_C = 5k\Omega$$

$$R_E = 3k\Omega$$

$$I_B = 10\mu A$$

$$\beta = 100$$

La I_B forza la corrente di base ad essere $10\mu A$

Ne consegue che:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 1mA$$

$$I_E = (\beta + 1) \cdot I_B = 1.01mA$$

La tensione su V_E risulta essere:

$$V_E = I_E \cdot R_E = 3.03V$$

La tensione su V_B si calcola come:

$$V_B = V_E + V_{BE} = 3.03V + 0.7V = 3.73V$$

La tensione su V_C risulta essere:

$$V_C = 10V - I_C \cdot R_C = 5V$$

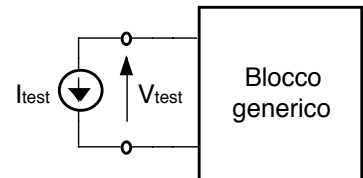
Il transistor opera in regione attiva in quanto

$$V_{CB} = 2.27V > 0V$$

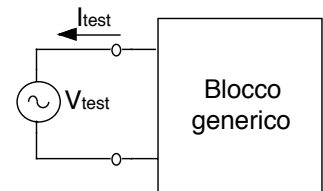
L'impedenza differenziale

- E' l'impedenza che vede un segnale iniettato tra due morsetti
- Se sono i morsetti di ingresso si definisce Impedenza di ingresso
- Se sono i morsetti di uscita si definisce Impedenza di uscita
- Per valutare l'impedenza differenziale, a seconda dell'opportunità del circuito, si possono utilizzare due metodi

- Caso 1: si applica una corrente di segnale di test (I_{test}) e si legge la tensione ai capi (V_{test})

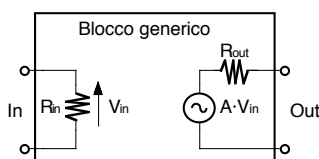


- Caso 2: si applica una tensione di segnale di test (V_{test}) e si legge la corrente provocata (I_{test})

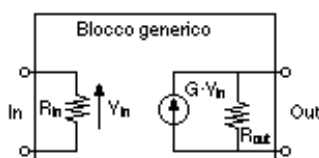


Modellizzazione dell'impedenza di ingresso / uscita

- Con amplificatore di tensione in uscita (Eq. di Thevenin)

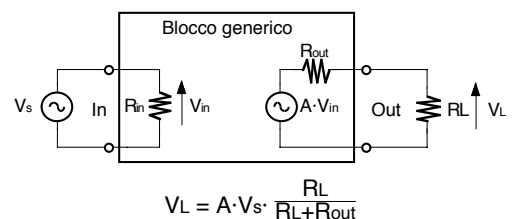


- Con amplificatore di transconduttanza in uscita (Eq. di Norton)



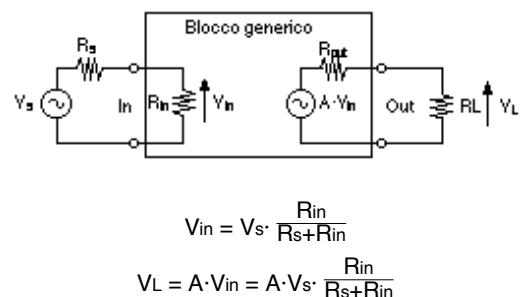
Effetto dell'impedenza di ingresso/uscita

- Effetto dell'impedenza di uscita (R_{out})



R_{out} dovrebbe essere la piu' piccola possibile

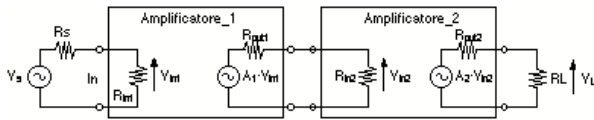
- Effetto dell'impedenza di ingresso (R_{in})
- Nell'ipotesi di $R_{out} = 0$



R_{in} dovrebbe essere la piu' grande possibile

La composizione di blocchi in cascata

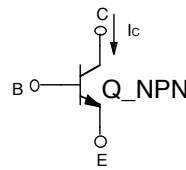
- Calcolo del guadagno



$$\frac{V_L}{V_s} = \frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_s} \cdot A_1 \cdot \frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}} \cdot A_2 \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{out2}}$$

- $\left(\frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_s}\right)$, $\left(\frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}}\right)$, e $\left(\frac{R_L}{R_L + R_{out2}}\right)$ sono termini di perdita
- R_{in} dovrebbe essere la più alta possibile
- R_{out} dovrebbe essere la più bassa possibile

Il circuito equivalente per piccolo segnale



Transistor NPN

$$I_c = I_s \cdot \exp(V_{BE}/V_T) \cdot \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right)$$

- Transconduttanza

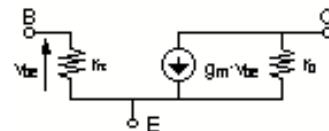
$$g_m = \frac{dI_c}{dV_{BE}} = I_s \cdot \exp(V_{BE}/V_T) \cdot \frac{1}{V_T} = \frac{I_c}{V_T} = \frac{1}{r_e}$$

- Resistenza di base (r_{π})

$$r_{\pi} = \left(\frac{dI_b}{dV_{BE}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{dI_c}{dV_{BE}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{I_c}{V_T}\right)^{-1} = \frac{\beta}{g_m}$$

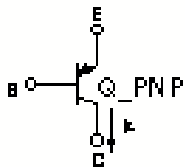
- Impedenza di uscita

$$r_o = \left(\frac{dI_c}{dV_{CE}}\right)^{-1} = \left(\frac{I_c}{V_A}\right)^{-1} = \frac{V_A}{I_c}$$



$$\beta = g_m \cdot r_{\pi}$$

Il circuito equivalente per piccolo segnale



Transistor PNP

$$I_c = I_s \cdot \exp(-V_{BE}/V_T) \cdot \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right)$$

Il circuito equivalente e' IDENTICO a quello dell'NPN

- Transconduttanza

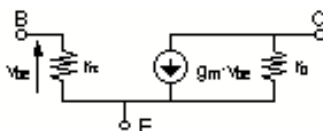
$$g_m = \frac{dI_c}{dV_{BE}} = I_s \cdot \exp(V_{BE}/V_T) \cdot \frac{1}{V_T} = \frac{I_c}{V_T} = \frac{1}{r_e}$$

- Resistenza di base (r_{π})

$$r_{\pi} = \left(\frac{dI_b}{dV_{BE}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{dI_c}{dV_{BE}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{I_c}{V_T}\right)^{-1} = \frac{\beta}{g_m}$$

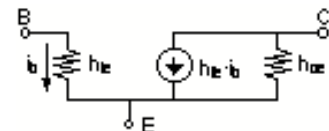
- Impedenza di uscita

$$r_o = \left(\frac{dI_c}{dV_{CE}}\right)^{-1} = \left(\frac{I_c}{V_A}\right)^{-1} = \frac{V_A}{I_c}$$



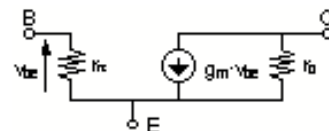
Circuito equivalente a parametri h

- Un altro possibile circuito equivalente (a parametri h) e' mostrato in figura.



Viene usato nei datasheet dei dispositivi discreti

- Si possono rapportare i parametri h con quelli a g_m



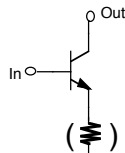
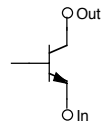
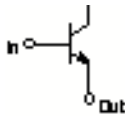
$$h_{ie} = r_{\pi}$$

$$h_{fe} = \beta$$

$$h_{oe} = r_o$$

Stadi di guadagno con un transistor

- Collettore comune
Ingresso : Base
Uscita : Emittitore
- Base comune
Ingresso : Emittitore
Uscita : Collettore
- Emettitore comune (anche con R di degenerazione)
Ingresso : Base
Uscita : Collettore

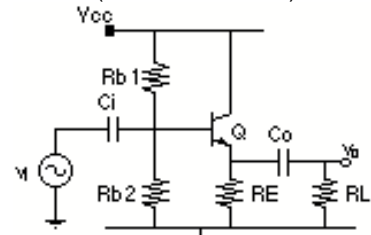


Caratterizzazione di una configurazione

- Guadagno in tensione (corrente)
- Impedenza di ingresso
- Impedenza di uscita

L'inseguitore di emittore

(Collettore comune)



$$V_{CC} = 10 \text{ V} \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V}$$

$$R_{b1} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_{b2} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_E = 4.3 \text{ k}\Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

Polarizzazione

Si suppone di trascurare I_B

V_B si può allora calcolare come partitore

$$V_B = V_{CC} \cdot \frac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = 5 \text{ V}$$

$$I_{R_{b2}} = \frac{5 \text{ V}}{5 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

$$V_E = V_B - V_{BE} = 5 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 4.3 \text{ V}$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E} = \frac{4.3 \text{ V}}{4.3 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

$$V_C = V_{CC} = 10 \text{ V}$$

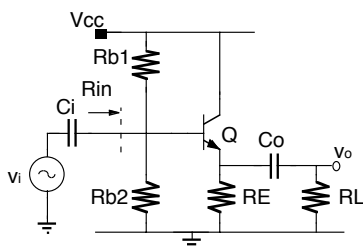
Verifica zona attiva:

$$V_{CB} = 10 \text{ V} - 5 \text{ V} = 5 \text{ V} \quad \text{OK!!}$$

Verifica I_B trascurabile:

$$I_B = \frac{I_E}{\beta + 1} = 9.9 \mu\text{A} \ll I_{R_{b2}} \quad \text{OK!!}$$

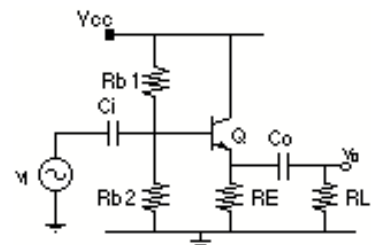
Inseguitore di emittore



Osservazioni

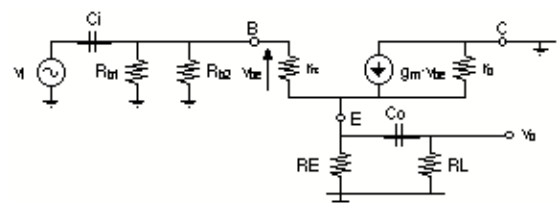
- C_i e C_o sono condensatori di disaccoppiamento. Il segnale di ingresso (V_i) e quello di uscita (V_o) sono centrati attorno a massa (0 V). Avere due possibili tensioni di polarizzazione per V_i e V_B ed anche per V_E e V_o permette di polarizzare al meglio il transistor.
- C_i realizza una funzione di trasferimento di tipo passa-alto con frequenza di taglio $f_H = \frac{1}{2\pi \cdot C_i \cdot R_{in}}$. Per frequenze superiori a f_H il condensatore si comporta da corto circuito.
- R_{b1} e R_{b2} polarizzano V_B . Non è possibile polarizzare la base con un generatore di tensione collegato direttamente sulla base, altrimenti non può passare il segnale.

Inseguitore di emittore



- Circuito equivalente di piccolo segnale

Si fanno i conti a centro-banda, cioè per frequenze tali per cui i condensatori sono già dei corto-circuiti



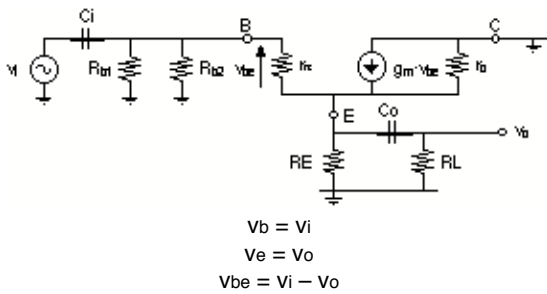
$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 0.04 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.04 \text{ A/V}} = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 100 \text{ k}\Omega$$

Inseguitore di emettitore

- Calcolo del guadagno



Equazione di Kirchoff al nodo E

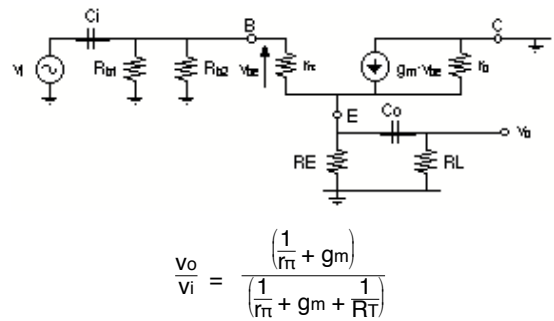
$$\frac{V_{be}}{r_{\pi}} + g_m \cdot V_{be} = \frac{V_o}{R_T}$$

con $R_T = R_E \parallel R_L \parallel r_o$

$$\begin{aligned} \frac{V_i - V_o}{r_{\pi}} + g_m(V_i - V_o) &= \frac{V_o}{R_T} \\ V_i \left(\frac{1}{r_{\pi}} + g_m \right) &= V_o \left(\frac{1}{r_{\pi}} + g_m + \frac{1}{R_T} \right) \\ \frac{V_o}{V_i} &= \frac{\left(\frac{1}{r_{\pi}} + g_m \right)}{\left(\frac{1}{r_{\pi}} + g_m + \frac{1}{R_T} \right)} \end{aligned}$$

Inseguitore di emettitore

- Calcolo del guadagno



Approx.1: $\frac{1}{r_{\pi}} = \frac{g_m}{\beta}$, (cioe' $g_m \gg \frac{1}{r_{\pi}}$) => si trascura r_{π}

Approx.2: si puo' trascurare nel parallelo di R_T la parte di r_o ($r_o \gg R_E \parallel R_L$)

R_T e' quindi la resistenza sull'emettitore: $R_T = R_E \parallel R_L$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_T}{1 + g_m \cdot R_T}$$

$$\begin{aligned} R_E &= 4.3 \text{ k}\Omega & R_L &= 1 \text{ k}\Omega \\ g_m &= 0.04 \text{ A/V} & r_{\pi} &= 2.5 \text{ k}\Omega & r_o &= 100 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

$$R_T = R_E \parallel R_L = 0.81 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_T}{1 + g_m \cdot R_T} = 0.97$$

Inseguitore di emettitore

- Considerazioni sul guadagno

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_T}{1 + g_m \cdot R_T}$$

Il caso di accoppiamento in dc (cioe' C_o non c'e' e sul carico passa la corrente di polarizzazione) corrisponde ad avere il carico totale (R_T) uguale alla resistenza di degenerazione di polarizzazione (R).

Nella valutazione seguente si suppone $R_L = \infty$ e quindi $R_T = R_E$

Si puo' scrivere (essendo $g_m = \frac{I_c}{V_T}$)

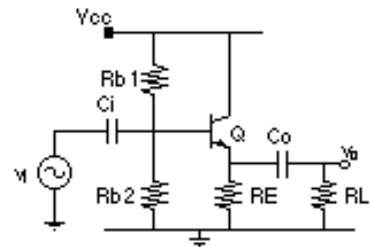
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{I_c}{V_T} \cdot R_E}{1 + \frac{I_c}{V_T} \cdot R_E} = \frac{V_{RE}}{V_{RE} + V_T}$$

Quindi per avere un guadagno molto prossimo all'unita', si deve avere un'alta caduta di tensione in continua su R_E (V_{RE})

V_{RE}	$\frac{V_o}{V_i}$
0.5	0.95238
1	0.97561
1.5	0.98361
2	0.98765
2.5	0.99010
3	0.99174
3.5	0.99291
4	0.99379

*** Quesito: studiare l'effetto di C_i finito

Dinamica del segnale



Per **dinamica di un segnale** si intende l'ampiezza massim (a grandi segnali) del segnale che puo' essere elaborato da un circuito senza alcuna variazione nella forma del segnale.

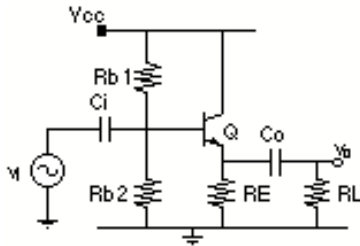
Tipicamente si hanno limitazioni al segnale sia verso l'alto che verso il basso.

Con un alto V_{RE} si riduce la dinamica del segnale sul nodo di base. Infatti, per una certa $V_{RE} = V_E$, $V_B = V_E + V_{BE}$, il segnale sulla base puo' avere un'escursione:

- verso l'alto di $V_{CC} - V_B$ (fissata dalla base e corrisponde ad arrivare a $V_{CB} = 0$)
- verso il basso di V_{RE} (fissata dall'emettitore e corrisponde ad arrivare a $V_E = 0$)

Tra le due, vale di volta in volta il valore piu' basso.

Dinamica del segnale



Con un'alimentazione $V_{CC} = 10V$, la dinamica al variare di V_{RE} (che influenza anche il guadagno) e' la seguente:

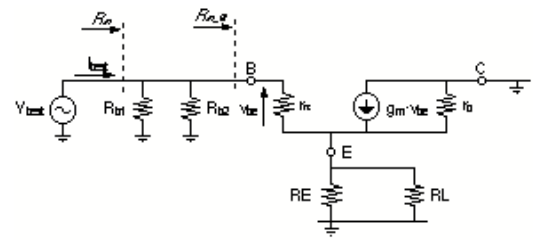
V_B	V_{RE}	$\frac{V_o}{V_i}$	Dinamica verso l'alto	Dinamica verso il basso
V_B	$V_B - V_{BE}$	$\frac{g_m \cdot R_E}{1 + g_m \cdot R_E}$	$V_{CC} - V_B$	V_{RE}
1	0.3	0.9231	9	0.3 <=
2	1.3	0.9811	8	1.3 <=
3	2.3	0.9892	7	2.3 <=
4	3.3	0.9925	6	3.3 <=
5	4.3	0.9942	5	4.3 <=
6	5.3	0.9953	4 <=	5.3
7	6.3	0.9960	3 <=	6.3
8	7.3	0.9966	2 <=	7.3
9	8.3	0.9970	1 <=	8.3

Da notare che la dinamica influenza anche il guadagno.

Per avere alta dinamica sul nodo di uscita e' necessario sacrificare un po' di guadagno

Inseguitore di emettitore

- Impedenza di ingresso (dalla base)



Applico V_{test} e calcolo I_{test}

$$R_{in} = R_{b1} // R_{b2} // R_{in_B}$$

Calcolo di R_{in_B}

$$I_m = \frac{V_{test} - V_e}{r_{\pi}}$$

Ma si e' calcolato prima che:

$$\frac{V_e}{V_{test}} = \frac{g_m \cdot R_T}{1 + g_m \cdot R_T}$$

$$I_m = \frac{V_{test}}{r_{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{g_m \cdot R_T}{1 + g_m \cdot R_T}\right) = \frac{V_{test}}{r_{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + g_m \cdot R_T}$$

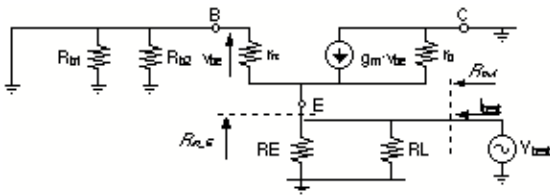
$$R_{in_B} = \frac{V_{test}}{I_m} = r_{\pi} (1 + g_m \cdot R_T) \approx \beta \cdot R_T = 81k\Omega$$

Dalla Base si vede un'impedenza (R_{in_B}) che e' β volte la resistenza collegata sull'emettitore (R_T)

R_{in_B} e' una resistenza alta

Inseguitore di emettitore

- Impedenza di uscita (dall'emettitore)



$$R_{out} = R_L // R_E // R_{in_E}$$

Calcolo R_{in_E} (trascuro r_o)

$$V_b = 0$$

$$V_e = V_{test}$$

$$V_{be} = -V_{test}$$

$$I_{test} = \frac{V_e}{r_{\pi}} - g_m \cdot V_{be} = \frac{V_{test}}{r_{\pi}} + g_m \cdot V_{test} = V_{test} \cdot \left(g_m + \frac{1}{r_{\pi}}\right)$$

Essendo $g_m = \frac{\beta}{r_{\pi}} \gg \frac{1}{r_{\pi}}$, trascuro r_{π}

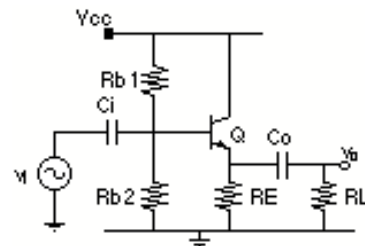
$$I_{test} = g_m \cdot V_{test}$$

$$\Rightarrow R_{in_E} = \frac{V_{test}}{I_{test}} = \frac{1}{g_m} = 25\Omega$$

R_{in_E} e' una resistenza bassa

Inseguitore di emettitore

(Collettore comune)



Caratteristiche generali

$$A_v = \frac{g_m \cdot R_{TE}}{1 + g_m \cdot R_{TE}} \approx 1$$

$$R_{in} = R_{in_B} = \beta \cdot R_T \quad \text{Alta}$$

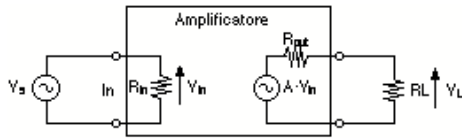
$$R_{out} = R_{in_E} = \frac{1}{g_m} = \frac{V_T}{I_C} \quad \text{Bassa}$$

- Utile per disaccoppiare gli stadi

Uso del buffer di tensione

- Si vuole pilotare un carico $R_L=1k\Omega$ con un amplificatore di guadagno A avente $R_{out}=10k\Omega$
- Su R_L si vuole avere

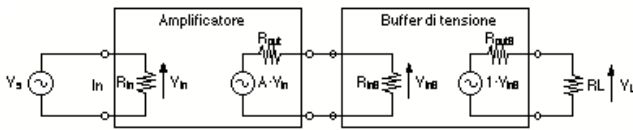
$$V_L = A \cdot V_{in}$$



- In realta', su R_L si ha

$$V_L = A \cdot V_{in} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{out}} = A \cdot V_{in} \cdot 0.09$$

- Per ovviare a cio' si puo' inserire un buffer di tensione che presenta R_{inB} molto alta e R_{outB} molto bassa

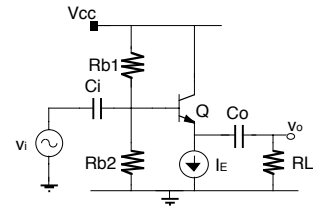


$$V_L = A \cdot V_{in} \cdot \frac{R_{inB}}{R_{inB} + R_{out}} \cdot 1 \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{outB}}$$

- Essendo $R_{inB} \gg R_{out}$ e $R_{outB} \ll R_L$ si ottiene

$$V_L \approx A \cdot V_{in}$$

Compromesso Bassa potenza-precisione



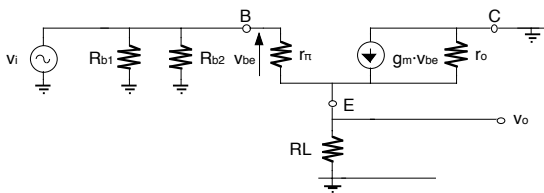
$$V_{CC} = 10 \text{ V} \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V} \\ R_{b1} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_{b2} = 5 \text{ k}\Omega \quad I_E = 1 \text{ mA} \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

- Polarizzazione (come nel caso precedente)

$$V_B = 5 \text{ V} \quad V_E = 4.3 \text{ V} \quad I_{Rb2} = 1 \text{ mA} \quad I_B = 10 \mu\text{A}$$

Compromesso Bassa potenza-precisione

- Circuito equivalente di piccolo segnale e calcolo del guadagno



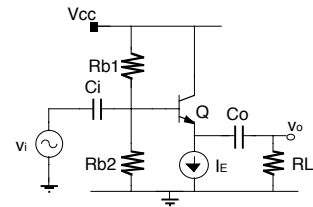
$$A_v = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L}$$

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{I_E}{V_T} \quad \text{dipende dal livello di corrente del generatore } I_E$$

=> Più e' alta I_E , più A_v tende al valore desiderato 1

I_E [mA]	$\frac{V_o}{V_i}$
0.5	0.95238
1	0.97561
1.5	0.98361
2	0.98765
2.5	0.99010
3	0.99174
3.5	0.99291
4	0.99379

Esercizio



Dimensionare i componenti in modo da avere un guadagno minimo di 0.99 con transistor avente $\beta=100$, per un carico di $R_L=100\Omega$. Usare $V_{CC}=10\text{V}$.

Soluzione

Il livello di corrente di Q entra nel guadagno secondo la formula:

$$A_v = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} = \frac{\frac{I_E}{V_T} \cdot R_L}{1 + \frac{I_E}{V_T} \cdot R_L} = 0.99$$

Da cio' si ottiene:

$$I_E = \frac{A_v \cdot V_T}{R_L \cdot (1 - A_v)} = 24.75 \text{ mA}$$

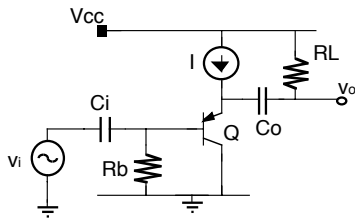
La corrente nel ramo di polarizzazione deve essere dimensionata in modo da risultare trascurabile la corrente di base data da:

$$I_B = \frac{I_E}{\beta} = 0.2475 \text{ mA}$$

La corrente dovra' quindi essere almeno 20mA. Supponendo di piazzare $V_B=5\text{V}$ (cosi' da avere $R_{b1}=R_{b2}$), si ottiene:

$$R_{b2} = R_{b1} = \frac{5 \text{ V}}{20 \text{ mA}} = 250 \Omega$$

Collettore comune



$$V_{CC} = 5V$$

$$\beta = 100 \quad R_b = 100 \text{ k}\Omega \quad I = 2 \text{ mA} \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

- E' un inseguitore di emettitore con un transistor pnp
- Polarizzazione

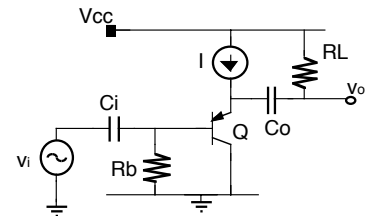
$$I_E = I = 2 \text{ mA}$$

$$I_B = \frac{I_E}{\beta + 1} = 0.0198 \text{ mA}$$

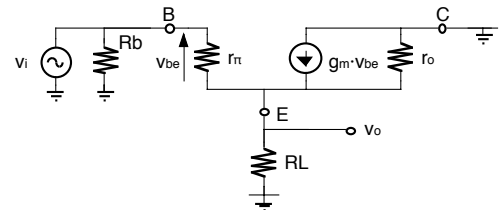
$$V_B = I_B \cdot R_b = 1.98 \text{ V}$$

$$V_E = V_B + V_{EB} = 1.98 \text{ V} + 0.7 \text{ V} = 2.68 \text{ V}$$

Collettore comune



- Circuito per piccolo segnale



$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{2 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 0.08 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.08 \text{ A/V}} = 1.25 \text{ k}\Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 50 \text{ k}\Omega$$

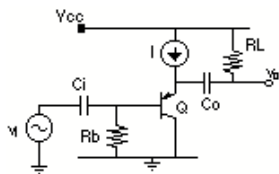
- Guadagno per piccolo segnale

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} = \frac{0.08 \cdot 1000}{1 + 0.08 \cdot 1000} = 0.987$$

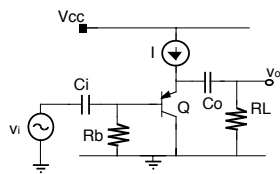
Collettore comune

(Circuiti alternativi)

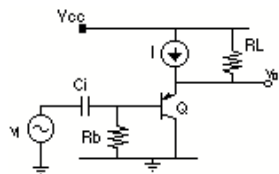
I circuiti presentati di seguito sembrano molto simili a quello appena studiato (di seguito indicato come caso 0)



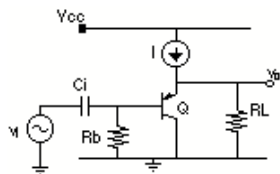
Caso 0



Caso 1



Caso 2



Caso 3

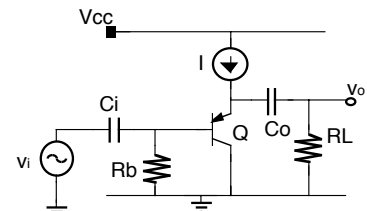
$$V_{CC} = 5V$$

$$\beta = 100 \quad R_b = 100 \text{ k}\Omega \quad I = 2 \text{ mA} \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

Caso 1



- E' stata spostata la connessione del carico R_L dall'alimentazione a massa.
- Polarizzazione

Il carico R_L e' accoppiato in ac (cioe' con un condensatore di disaccoppiamento C_o)

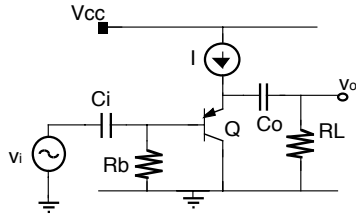
R_L e' quindi ininfluente per la polarizzazione del transistor che rimane quella del caso 0

$$I_E = I = 2 \text{ mA} \quad I_B = 19.8 \text{ }\mu\text{A} \quad V_B = 1.98 \text{ V} \quad V_E = 2.68 \text{ V}$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

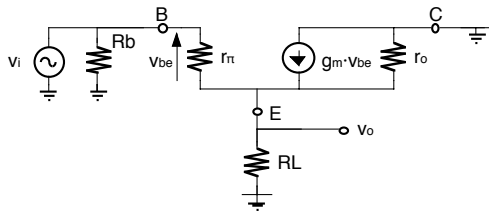
Caso 1



- Circuito per piccolo segnale

Il condensatore e_i comunque connesso ad un'alimentazione (massa) che viene annullata per il piccolo segnale

\Rightarrow il circuito equivalente non cambia ne' come configurazione ne' come valori dei componenti a piccolo segnale (la polarizzazione e' la stessa)



- Guadagno per piccolo segnale

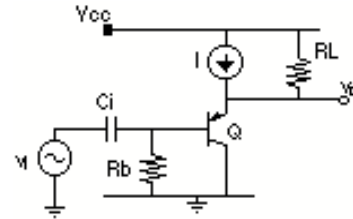
Anche il guadagno di piccolo segnale rimane quello del Caso 0

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} = 0.975$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

Caso 2


 $V_{CC} = 5V$
 $\beta = 100$
 $R_b = 100 \text{ k}\Omega$
 $I = 2 \text{ mA}$
 $R_L = 1 \text{ k}\Omega$

- Polarizzazione

Il carico R_L e' accoppiato in ac (in continua) quindi interviene anche nel calcolo del punto di lavoro

$$I_E = I + I_{RL} = I + \frac{V_{CC} - V_E}{R_L}$$

$$I_E = I_B \cdot (\beta + 1)$$

$$V_B = I_B \cdot R_b$$

$$V_{CC} = R_L \cdot I_{RL} + V_{EB} + V_B = R_L \cdot (I_E - I) + V_{EB} + I_B \cdot R_b = R_L \cdot (I_B \cdot (\beta + 1) - I) + V_{EB} + I_B \cdot R_b$$

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{EB} + I \cdot R_L}{R_L \cdot (\beta + 1) + R_b} = 31.3 \mu A$$

$$I_E = I_B \cdot (\beta + 1) = 3.1 \text{ mA}$$

$$I_{RL} = I_E - I = 1.1 \text{ mA}$$

$$V_E = V_{CC} - R_L \cdot I_{RL} = 3.83 \text{ V}$$

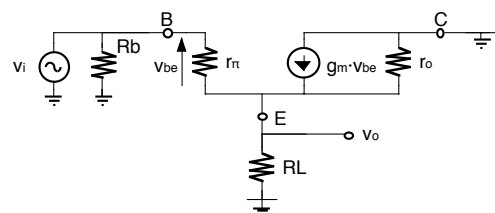
$$V_B = V_E - V_{EB} = 3.13 \text{ V}$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

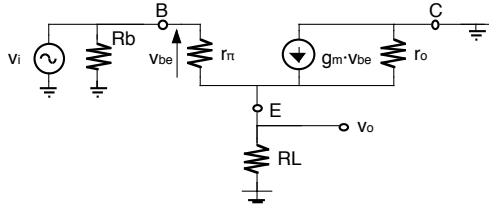
Caso 2

- Guadagno per piccolo segnale



- Circuito per piccolo segnale

La configurazione del circuito equivalente di piccolo segnale risulta uguale a quella di Caso 0 e 1



Il carico R_L interviene nella polarizzazione e quindi modifica anche i valori dei componenti del circuito del piccolo segnale.

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{3.1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 0.124 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.124 \text{ A/V}} = 800 \Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{3.1 \text{ mA}} = 32.25 \text{ k}\Omega$$

- La configurazione e' la stessa di caso 0 e 1, pertanto l'espressione del guadagno di piccolo segnale e' la stessa

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L}$$

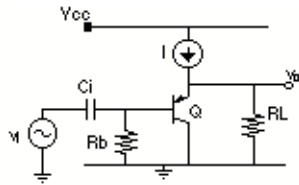
- Cambiano pero' i valori

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} = \frac{0.124 \cdot 1000}{1 + 0.124 \cdot 1000} = 0.992$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

Caso 3



$V_{CC}=5V$

$\beta = 100$

$R_b = 100 \text{ k}\Omega$

$I = 2 \text{ mA}$

$R_L = 1 \text{ k}\Omega$

- Polarizzazione

Anche in questo caso, il carico e' connesso in dc e quindi interviene nella polarizzazione

Suppongo il Q acceso

$$I = I_E + I_{RL} = (\beta+1) \cdot I_B + \frac{V_E}{R_L}$$

$$V_E = V_{EB} + I_B \cdot R_b$$

$$I = (\beta+1) \cdot I_B + \frac{V_{EB} + I_B \cdot R_b}{R_L}$$

$$I_B = \frac{I - \frac{V_{EB}}{R_L}}{1 + \beta + \frac{R_b}{R_L}} \approx 6.5 \mu A$$

$$I_E = (\beta+1) \cdot I_B = 653 \mu A$$

$$I_{RL} = I - I_E = 1.35 \text{ mA}$$

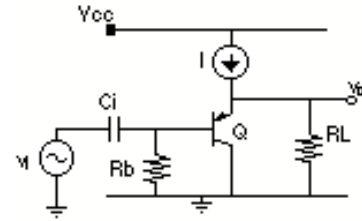
$$V_E = R_L \cdot I_{RL} = 1.35 \text{ V}$$

$$V_B = V_E - V_{EB} = 1.35 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 0.65 \text{ V}$$

Verifica $V_B = R_b \cdot I_B = 0.65 \text{ V}$ OK !!!!

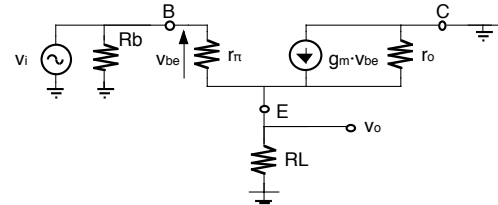
Collettore comune

Caso 3



- Circuito per piccolo segnale

La configurazione del circuito equivalente di piccolo segnale risulta uguale a quella di Caso 0, 1 e 2



I valori dei componenti del circuito del piccolo segnale sono:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{653 \mu A}{25 \text{ mV}} = 0.026 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.026 \text{ A/V}} = 3830 \Omega$$

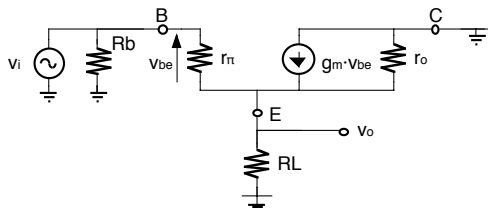
$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{653 \mu A} = 153.14 \text{ k}\Omega$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

Caso 3

- Guadagno per piccolo segnale



- La configurazione e' la stessa di caso 0, 1 e 2, pertanto l'espressione del guadagno di piccolo segnale e' la stessa

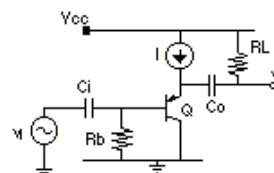
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L}$$

- Cambiano pero' i valori

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} = \frac{0.026 \cdot 1000}{1 + 0.026 \cdot 1000} = 0.962$$

Collettore comune

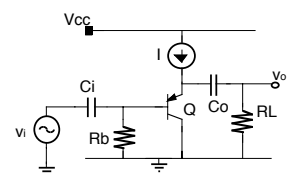
(Circuiti alternativi)



Caso 0

$I_C = 2 \text{ mA}$

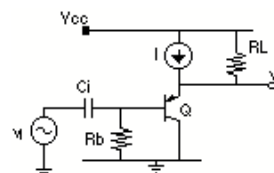
$$\frac{V_o}{V_i} = 0.987$$



Caso 1

$I_C = 2 \text{ mA}$

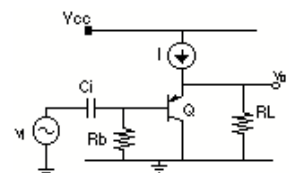
$$\frac{V_o}{V_i} = 0.987$$



Caso 2

$I_C = 3.1 \text{ mA}$

$$\frac{V_o}{V_i} = 0.992$$



Caso 3

$I_C = 653 \mu A$

$$\frac{V_o}{V_i} = 0.962$$

$V_{CC} = 5V$

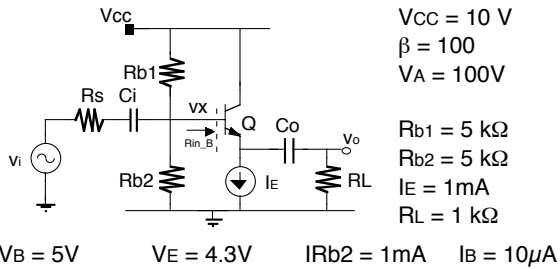
$\beta = 100$

$R_b = 100 \text{ k}\Omega$

$I = 2 \text{ mA}$

$R_L = 1 \text{ k}\Omega$

Effetto di R_s



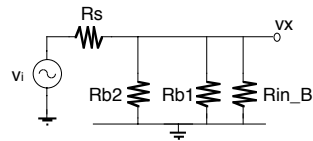
La struttura puo' essere studiata con due passi:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_i}$$

- $\frac{V_o}{V_x}$ e' gia' stato calcolato => $\frac{V_o}{V_x} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L}$

- Calcolo di $\frac{V_x}{V_i}$

Circuito equivalente di piccolo segnale



$$R_{in_B} = \beta \cdot R_L$$

$$V_x = V_i \cdot \frac{R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel R_{in_B}}{R_s + R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel R_{in_B}}$$

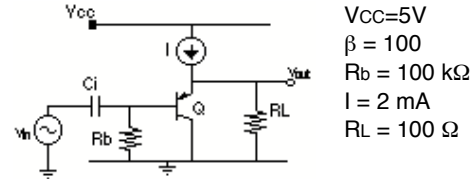
$$\frac{V_x}{V_i} = \frac{R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel \beta \cdot R_L}{R_s + R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel \beta \cdot R_L}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_L}{1 + g_m \cdot R_L} \cdot \frac{R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel \beta \cdot R_L}{R_s + R_{b2} \parallel R_{b1} \parallel \beta \cdot R_L}$$

Collettore comune

(Circuiti alternativi)

Caso 3-bis



• Polarizzazione

Il carico e' connesso in dc e quindi interviene nella polarizzazione

Suppongo il Q acceso

$$I = I_E + I_{RL} = (\beta + 1) \cdot I_B + \frac{V_E}{R_L}$$

$$V_E = V_{EB} + I_B \cdot R_b$$

$$I = (\beta + 1) \cdot I_B + \frac{V_{EB} + I_B \cdot R_b}{R_L}$$

$$I_B = \frac{I - \frac{V_{EB}}{R_L}}{1 + \beta + \frac{R_b}{R_L}} \approx -4.54 \mu A \quad \text{<= ASSURDO (} I_B \text{ deve essere } > 0 \text{)}$$

=> Allora Q e' spento

$$V_E = I \cdot R_L = 200 \text{ mV}$$

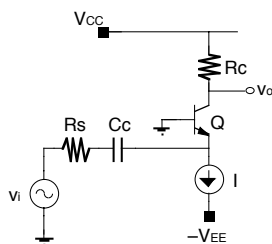
$$I_B = 0$$

$$V_B = 0$$

$V_{EB} = 200 \text{ mV}$ cioe' il transistor e' effettivamente spento

Lo stadio a base comune

(Inseguitore di corrente)



Ingresso: Emettore

Uscita: Collettore

$$V_{CC} = 10 \text{ V} \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V}$$

$$R_s = 50 \Omega \quad I = 1 \text{ mA} \quad R_C = 5 \text{ k}\Omega$$

• Polarizzazione

$$V_B = 0 \text{ V}$$

$$V_E = -0.7 \text{ V}$$

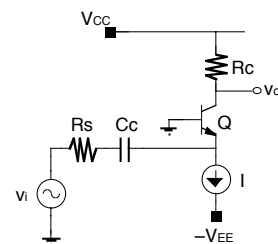
$$I_E = I = 1 \text{ mA}$$

$$I_C = \alpha \cdot I_E = \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot I_E = 0.99 \text{ mA}$$

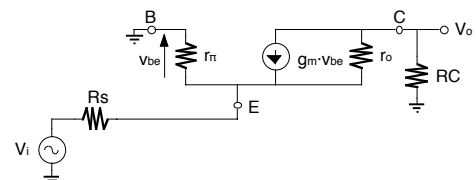
$$V_C = V_{CC} - I_C \cdot R_C = 10 \text{ V} - 0.99 \text{ mA} \cdot 5 \text{ k}\Omega = 5.05 \text{ V}$$

Base comune

(Inseguitore di corrente)



• Circuito equivalente di piccolo segnale



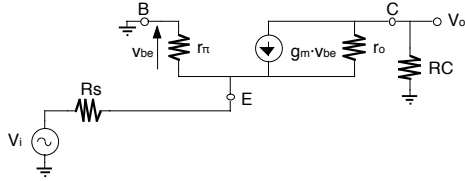
$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 0.04 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.04 \text{ A/V}} = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 100 \text{ k}\Omega$$

Base comune

- Calcolo del guadagno



$$\frac{V_i - V_e}{R_s} + g_m \cdot (V_b - V_e) = \frac{V_e}{r_\pi} \quad \text{ma } V_b = 0$$

$$V_i = V_e + g_m \cdot R_s \cdot V_e + \frac{V_e}{r_\pi}$$

$$V_e = \frac{V_i}{1 + g_m \cdot R_s + \frac{R_s}{r_\pi}}$$

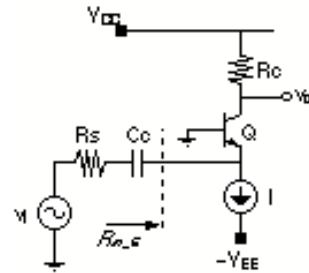
$$V_o = -g_m \cdot R_C \cdot V_e = g_m \cdot R_C \cdot V_e = g_m \cdot R_C \cdot \frac{V_i}{1 + g_m \cdot R_s + \frac{R_s}{r_\pi}}$$

Trascuro r_π

$$\frac{V_o}{V_i} \approx \frac{g_m \cdot R_C}{1 + g_m \cdot R_s} = 100$$

Base comune

- Impedenza di ingresso

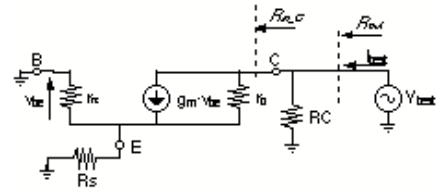


E' l'impedenza che si vede in emettitore.

E' gia' stata calcolata

$$R_{in_E} = \frac{1}{g_m}$$

- Impedenza di uscita



$$R_{out} = R_C \parallel R_{in_C}$$

Base comune

- Calcolo di R_{in_C}

$$\frac{V_{test} - V_e}{r_o} + g_m \cdot (V_b - V_e) = \frac{V_e}{R_s} + \frac{V_e}{r_\pi} \quad \text{ma } V_b = 0$$

$$V_{test} = V_e \cdot \left(1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s} + \frac{r_o}{r_\pi} \right) =$$

$$= V_e \cdot \left(1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi} \right)$$

$$V_e = \frac{V_{test}}{\left(1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi} \right)}$$

$$I_{test} = \frac{V_{test} - V_e}{r_o} - g_m \cdot V_e =$$

$$= V_{test} \cdot \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_o + g_m} \right) \cdot \frac{1}{\left(1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi} \right)}$$

$$= \frac{V_{test}}{r_o} \cdot \left(\frac{1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi} - (1 + g_m \cdot r_o)}{1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi}} \right) =$$

$$= \frac{V_{test}}{r_o} \cdot \left(\frac{\frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi}}{1 + g_m \cdot r_o + \frac{r_o}{R_s \parallel r_\pi}} \right) \approx g_m \cdot r_o \cdot \left(\frac{R_s \parallel r_\pi}{r_o} \right)$$

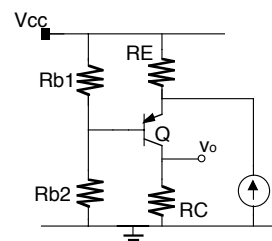
$$R_{in_C} = \frac{r_o \cdot (r_\pi + R_s) + (1 + g_m \cdot r_o) \cdot r_\pi \cdot R_s}{r_\pi + R_s} \approx g_m \cdot r_o \cdot (r_\pi / R_s)$$

$$\text{per } R_s = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{in_C} = r_o$$

R_{in_C} e' una resistenza molto alta

Base comune

Essendo il nodo di ingresso (emettitore) a bassa impedenza e' naturale usare come segnale di ingresso una corrente (che tende ad entrare nei nodi a bassa impedenza)



$R_{b1} = 1\text{ k}\Omega$
 $R_{b2} = 1\text{ k}\Omega$
 $R_L = 1\text{ k}\Omega$
 $R_E = 1\text{ k}\Omega$
 $\beta = 100$
 $V_{CC} = 5\text{ V}$

xxx ci serve un condensatore tra base e massa

- Da notare: I_i e' generatore di corrente di segnale e NON ha bisogno del condensatore di disaccoppiamento, in quanto quando esso viene spento (per il calcolo della polarizzazione) diventa un circuito aperto e non influenza il punto di lavoro.

- Polarizzazione

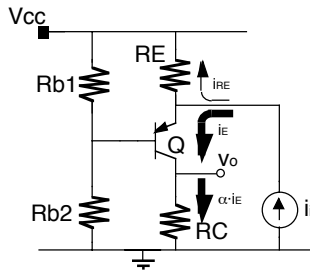
$$V_B = V_{CC} \cdot \frac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = 2.5\text{ V}$$

$$V_E = V_B + V_{EB} = 2.5\text{ V} + 0.7\text{ V} = 3.2\text{ V}$$

$$I_E = \frac{V_{CC} - V_E}{R_E} = 1.8\text{ mA}$$

$$V_C = I_E \cdot \alpha \cdot R_C = 1.782\text{ V}$$

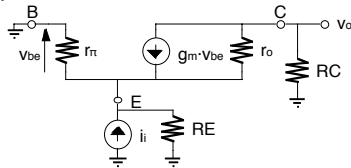
Base comune



Concetto: la corrente di segnale i_i vede una biforcazione tra l'impedenza di emettitore ($=1/g_m$ e quindi bassa) e R_E . La quasi totalità entra nell'emettitore. Di questa parte α volte esce dal collettore ed arriva sul carico R_L ove diventa tensione di uscita.

Il transistor opera quindi da *buffer di corrente*

- Circuito equivalente



I valori dei componenti del circuito del piccolo segnale sono:

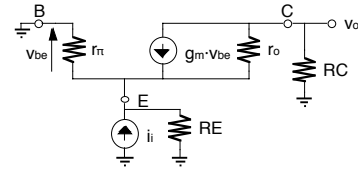
$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1.8\text{mA}}{25\text{mV}} = 0.072 \text{ A/V}$$

$$r_\pi = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.072 \text{ A/V}} = 1390 \Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100\text{V}}{1.8\text{mA}} = 55.5 \text{ k}\Omega$$

Base comune

- Calcolo del guadagno (di transresistenza $R_{out} = v_o/i_i$)



$$\begin{cases} i_i = \frac{v_e}{R_E} + \frac{v_e}{r_\pi} + \frac{v_e - v_o}{r_o} - g_m \cdot (v_b - v_e) \\ \frac{v_e - v_o}{r_o} - g_m \cdot (v_b - v_e) = \frac{v_o}{R_C} \end{cases}$$

$$\frac{v_o}{i_i} = \frac{R_C \cdot R_E \cdot (1 + g_m \cdot r_o) \cdot r_\pi}{(R_C + r_o) \cdot R_E + (R_C + R_E) \cdot r_\pi + r_o \cdot r_\pi \cdot (1 + g_m \cdot R_E)} = 976 \Omega$$

$$R_{out} = \frac{v_o}{i_i} \approx R_C = 1000 \Omega$$

E' un guadagno di *Transimpedenza*

- Valutazione approssimata

$$i_e = \frac{v_e}{R_{in_E}} = \frac{i_i \cdot (R_{in_E} // R_E)}{R_{in_E}} = i_i \cdot \frac{R_E}{R_{in_E} + R_E} = i_i \cdot 0.986$$

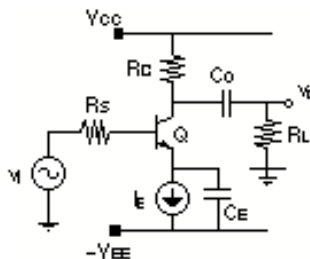
$$i_c = \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot i_e = 0.97654 \cdot i_i$$

$$v_o = i_c \cdot R_C = 976 \Omega \cdot i_i$$

$$R_{out} = \frac{v_o}{i_i} = 976 \Omega$$

- Per evitare la partizione di corrente su R_E , bisogna alzare l'impedenza di R_E , usando, ad esempio, un generatore di corrente come fatto nel primo schema studiato

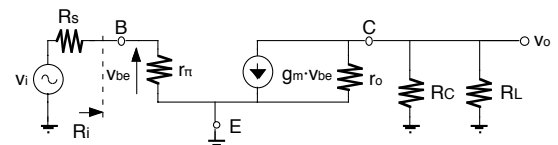
Lo stadio a emettitore comune



- Il bipolare e' polarizzato da una sorgente di corrente costante I_E .
- Il condensatore C_E ha una reattanza piccola per le frequenze di interesse e quindi connette l'emettitore a massa (condensatore di bypass).
- Il generatore di ingresso v_i ha una resistenza serie R_s ed e' connesso alla base.
- v_i ed R_s possono rappresentare o una sorgente di segnale o l'equivalente di Thevenin di uno stadio precedente.
- Il segnale di uscita v_o e' preso sul collettore.
- C_o e' il condensatore di disaccoppiamento.

Emettitore comune

- Calcolo dell'impedenza di ingresso R_i



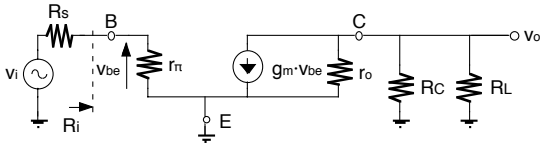
$$R_i = V_{be}/i_b = r_\pi$$

- Effetto di R_s : la frazione di v_i che appare alla base e' v_{be} :

$$\frac{v_{be}}{v_i} = \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi}$$

Emettitore comune

Calcolo del guadagno di tensione, $A_v = \frac{V_o}{V_i}$



$$V_o = -g_m \cdot V_{be} \cdot (r_o // R_C // R_L)$$

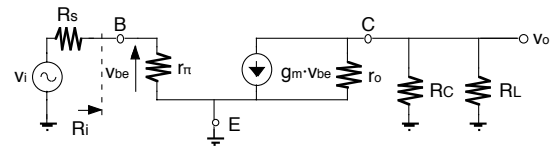
Assumendo $R'_L = R_C // R_L$

Il guadagno di tensione fra la base ed il collettore e' dato da:

$$\frac{V_o}{V_{be}} = -g_m \cdot (r_o // R'_L)$$

Emettitore comune

Calcolo del guadagno di tensione, $A_v = \frac{V_o}{V_i}$



Il guadagno di tensione complessivo A_v :

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{r_{\pi}}{r_{\pi} + R_S} \cdot g_m \cdot (r_o // R'_L) = -\beta \cdot \frac{r_o // R'_L}{r_{\pi} + R_S}$$

- se $R_S \gg r_{\pi}$, il guadagno A_v sara' altamente dipendente dal valore di β

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\beta \cdot \frac{r_o // R'_L}{R_S}$$

- se $R_S \ll r_{\pi}$

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -g_m \cdot (r_o // R'_L)$$

- Per circuiti discreti, R'_L e' usualmente piu' basso di r_o e r_o puo' essere trascurata.

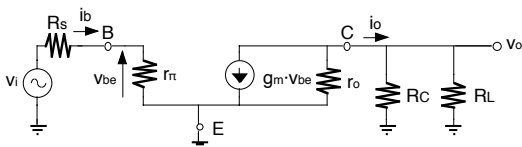
- Se $R'_L = \infty$ (generatore di corrente o carico attivo)

$$A_{vmax} = -g_m \cdot r_o = -\frac{I_C}{V_T} \cdot \frac{V_A}{I_C} = -\frac{V_A}{V_T}$$

(indipendente da I_C)

Emettitore comune

- Calcolo del guadagno di corrente, $A_i = i_o / i_b$



$$i_o = -g_m \cdot V_{be} \cdot \frac{r_o}{r_o + R'_L}$$

$$i_b = \frac{V_{be}}{r_{\pi}}$$

$$A_i = \frac{i_o}{i_b} = \frac{-g_m \cdot V_{be} \cdot \frac{r_o}{r_o + R'_L}}{\frac{V_{be}}{r_{\pi}}} = -\beta \cdot \frac{r_o}{r_o + R'_L}$$

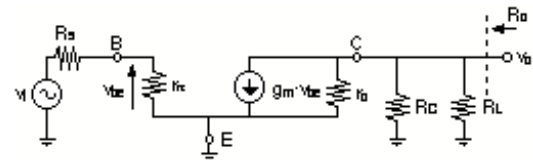
Per $R'_L \ll r_o$:

$$A_i = -\beta$$

β = guadagno di corrente di corto-circuito ($R'_L = 0$)

Emettitore comune

Calcolo dell'impedenza di uscita R_o

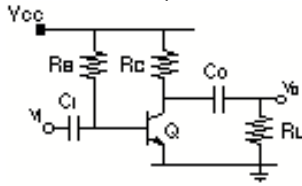


Si pone $v_i = 0$, quindi anche $v_{be} = 0$, quindi :

$$R_o = r_o // R'_L$$

Emettitore comune

Esempio 1



$$V_{CC} = 15 \text{ V} \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V}$$

$$R_B = 1.43 \text{ M}\Omega \quad R_C = 5 \text{ k}\Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

- Polarizzazione

$$V_{BE} = 0.7 \text{ V}$$

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_B}{R_B} = \frac{14.3 \text{ V}}{1.43 \text{ M}\Omega} = 10 \mu\text{A}$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 1 \text{ mA}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C \cdot R_C = 10 \text{ V}$$

$$V_{CE} = (10 - 0) \text{ V} = 10 \text{ V}$$

- Verifica zona attiva:

$$V_{CB} = V_{CE} - V_{BE} = (10 - 0.7) \text{ V} = 4.3 \text{ V} \quad \text{OK!!}$$

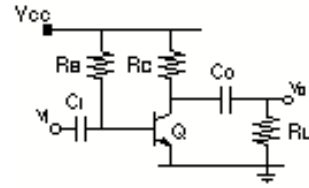
Importante: Se cambio β cambia la polarizzazione: I_B rimane costante ma $I_C = \beta \cdot I_B$

β	100	50
I_C	1 mA	0.5 mA

... e la dipendenza dalla temperatura ?

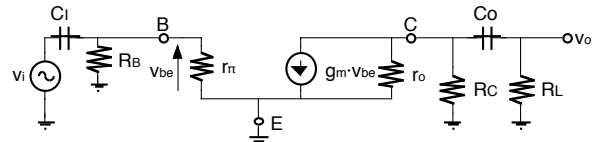
Emettitore comune

Esempio 1



Circuito equivalente per piccoli segnali:

Si fanno i conti a centro-banda, cioè per frequenze tali per cui i condensatori sono già dei corto-circuiti.



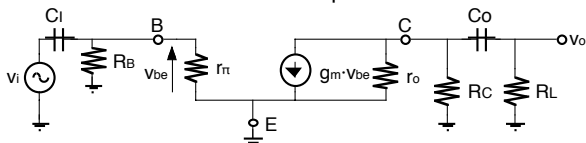
$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 0.04 \text{ A/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{100}{0.04 \text{ A/V}} = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$r_o = \frac{V_A}{I_C} = \frac{100 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 100 \text{ k}\Omega$$

Emettitore comune

Esempio 1



$$V_{BE} = V_i$$

$$v_o = -g_m \cdot v_i \cdot R_T$$

$$R_T = R_C // R_L // r_o \approx R_C // R_L$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -g_m \cdot (R_C // R_L) = -33.32$$

Da notare che:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{I_C}{V_T} \cdot (R_C // R_L) = -33.32$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{I_C}{V_T} \cdot (R_C // R_L) = -\frac{V_{CC} - V_{BE}}{V_T \cdot R_B} \cdot \beta \cdot (R_C // R_L)$$

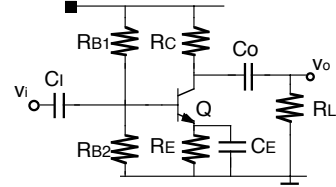
Il guadagno A_v dipende linearmente da β che e' molto variabile:

β	100	50
I_C	1 mA	0.5 mA
A_v	-33.32	-16.6

Emettitore comune

Esempio 2: Polarizzazione automatica

$V_{CC} = 15 \text{ V}$



$$R_{B1} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_C = 5 \text{ k}\Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega \quad V_{CEsat} = 0$$

$$R_{B2} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_E = 6.8 \text{ k}\Omega \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V}$$

- Polarizzazione

Trascuro I_B (al termine e' necessario verificare tale ipotesi)

$$V_B = V_{CC} \cdot \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} = 7.5 \text{ V}$$

$$V_{BE} = 0.7 \text{ V} \text{ (ipotesi di zona attiva da verificare)}$$

$$V_E = V_B - V_{BE} = 7.5 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 6.8 \text{ V}$$

$$I_E = \frac{V_E - 0 \text{ V}}{R_E}$$

$$I_C = \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot I_E = 0.95 \text{ mA} \approx 1 \text{ mA}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C \cdot R_C = 10 \text{ V}$$

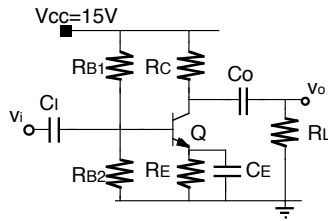
Verifica:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = 10 \mu\text{A} \ll \frac{V_C}{R_{B1} + R_{B2}} = 1.5 \text{ mA OK!}$$

$$V_{CE} = 10 \text{ V} - 6.8 \text{ V} = 3.2 \text{ V} > V_{CEsat} \quad \text{OK!}$$

Emettitore comune

Esempio 2



Osservazione:

- β non influenza la polarizzazione in quanto si e' supposto:
 $I_B \ll I_{B1, B2}$

Infatti se si supponesse che β vari:

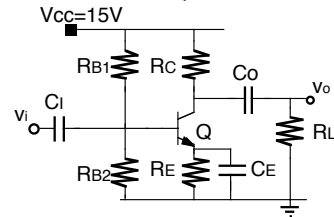
β	100	50
I_B	$10\mu A$	$20\mu A (< 1.5mA)$

La polarizzazione e' indipendente da β .

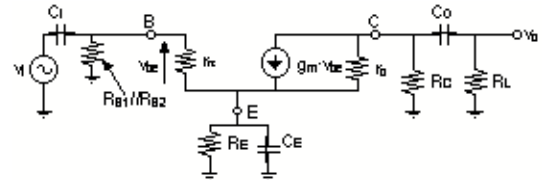
... e la temperatura ?

Emettitore comune

Esempio 2



- Guadagno di piccolo segnale: circuito equivalente a piccolo segnale



$$V_i = V_{be}$$

$$R_T = r_o \parallel R_C \parallel R_L$$

$$v_o = -g_m R_T v_i$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -g_m R_T$$

Per avere i valori numerici devo sostituire a g_m , r_o , r_π i dati derivati dalla polarizzazione:

$$g_m = I_C / V_T = 40 \text{ mA/V} \quad (V_T = 25 \text{ mV})$$

$$r_o = V_A / I_C = 100 \text{ k}\Omega$$

$$r_\pi = \beta / g_m = 2.5 \text{ k}\Omega$$

Emettitore comune

Esempio 2

$$R_T = R_L \parallel R_C \parallel r_o = 1 \text{ k}\Omega \parallel 5 \text{ k}\Omega \parallel 100 \text{ k}\Omega$$

e' possibile quindi trascurare r_o ,

$$\text{se si trascura } r_o \quad R_T = 826.4 \text{ } \Omega$$

$$\text{se non si trascura } r_o \quad R_T = 833 \text{ } \Omega$$

Il guadagno risulta:

$$A_v = -40 \text{ mA/V} \cdot 833 \Omega = -33.32$$

In generale:

$$A_v = -g_m R_T = -(I_C / V_T) R_T$$

quindi A_v aumenta con l'aumentare di I_C .

Se si varia β il guadagno in questa situazione, non varia.

Osservazione

Si supponga $V_A = \infty$ (il che implica che $r_o = \infty$) e $R_L = \infty$
 $A_v = -g_m R_C = 200$

Se si vuole un guadagno maggiore si puo' aumentare R_C

Ma aumentando R_C , si cambia la polarizzazione di V_C che puo' variare fino a V_{CEsat}

$$V_{Cmin} = V_E + V_{CEsat} = 6.8 \text{ V}$$

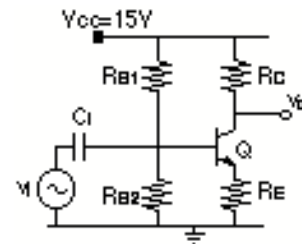
$$R_{Cmax} = \frac{15 \text{ V} - 6.8 \text{ V}}{1 \text{ mA}} = 7.2 \text{ k}\Omega$$

Si puo' quindi calcolare il guadagno massimo:

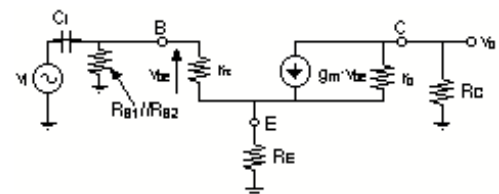
$$A_{vmax} = -40 \text{ mA/V} \cdot 7.2 \text{ k}\Omega = 288$$

Emettitore comune

Esempio 3: Effetto della resistenza RE



- La polarizzazione e' identica al circuito precedente
- Cambia il circuito equivalente per piccolo segnale per il calcolo del guadagno.



$$\begin{cases} V_i - V_e = V_{be} \\ \frac{V_i - V_e}{r_\pi} + g_m (V_i - V_e) = \frac{V_e}{R_E} \\ v_o = -(v_i - v_e) \cdot g_m R_C \end{cases}$$

Emettitore comune

Esempio 3: Effetto della resistenza R_E

$$v_o = -g_m R_C \cdot \left(v_i - v_i \cdot \frac{1 + \beta}{1 + \beta + \frac{r_{\pi}}{R_E}} \right) =$$

$$-g_m R_C \cdot \frac{r_{\pi}}{R_E} \cdot v_i \approx -\frac{g_m R_C}{1 + \beta \cdot \frac{R_E}{r_{\pi}}} \cdot v_i$$

$$\frac{v_o}{v_i} \approx -\frac{g_m R_C}{1 + \beta \cdot \frac{R_E}{r_{\pi}}}$$

- Per $g_m R_E \gg 1$

$$A_v = -\frac{R_C}{R_E}$$

$$g_m R_E = \frac{I_C}{V_T} \cdot R_E = \frac{V_{RE}}{V_T} \gg 1$$

- Esempio numerico:

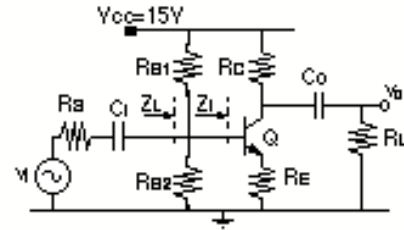
$$I_C = 1 \text{ mA}; \quad R_C = 5 \text{ k}\Omega; \quad R_E = 6.8 \text{ k}\Omega$$

$$V_{CC} = 15 \text{ V}; \quad R_{B1} = R_{B2}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{40 \text{ mA/V} \cdot 3 \text{ k}\Omega}{10 \text{ mA/V} \cdot 6.8 \text{ k}\Omega} = 0.732$$

Emettitore comune

Esempio 4: Effetto della resistenza R_S



$$R_{B1} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_C = 5 \text{ k}\Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega \quad R_S = 500 \Omega$$

$$R_{B2} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_E = 6.8 \text{ k}\Omega \quad \beta = 100$$

- R_S non influenza la polarizzazione che rimane quella dei casi precedenti.

$$Z_I = r_{\pi} = \beta / g_m = 2.5 \text{ k}\Omega$$

$$Z_L = r_{\pi} // R_{B1} // R_{B2} = 1.25 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{v_s}{v_i} = \frac{Z_L}{R_S + Z_L} = 0.714$$

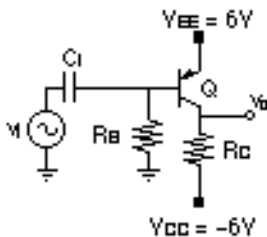
$$A_o = \frac{v_o}{v_s} \cdot \frac{v_s}{v_i}$$

$$\frac{v_o}{v_s} = -g_m R_T = -40 \text{ mA/V} \cdot (1 \text{ k} // 5 \text{ k}) = -33.33$$

$$A_o = 0.714 \cdot (-33.33) = -23.8$$

Emettitore comune

Esempio 5



$$R_B = 133 \text{ k}\Omega \quad R_C = 1 \text{ k}\Omega \quad \beta = 100 \quad r_o = \infty$$

Polarizzazione:

$$V_{BE} = -0.7 \text{ V (da verificare)}$$

$$V_B = V_{BE} + V_{EE} = -0.7 \text{ V} + 6 \text{ V} = 5.3 \text{ V}$$

$$I_B = \frac{V_B}{R_B} = \frac{5.3 \text{ V}}{133 \text{ k}\Omega} = 0.0398 \text{ mA} \approx 0.04 \text{ mA}$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 4 \text{ mA}$$

Verifica:

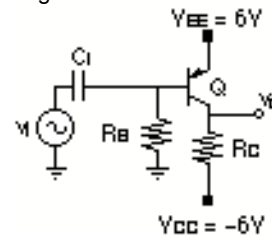
$$V_{CE} = R_C \cdot I_C + V_{CC} = -2 \text{ V}$$

$$V_{CB} = V_{CE} - V_{EB} = -2 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = -2.7 \text{ VOK!!}$$

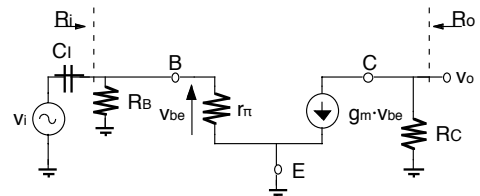
Emettitore comune

Esempio 5

Analisi per piccoli segnali



Il circuito equivalente per piccoli segnali e' il seguente:



$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = 160 \text{ mA/V}$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = 625 \Omega$$

Guadagno:

$$A_v = -g_m R_C = -160$$

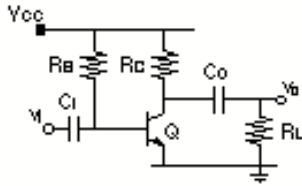
Impedenza di ingresso:

$$R_i = R_B // r_{\pi} \approx r_{\pi}$$

Impedenza di uscita:

$$R_o = R_C$$

Dinamica del segnale



$$V_{CC} = 15 \text{ V} \quad \beta = 100 \quad V_A = 100 \text{ V}$$

$$R_B = 1.43 \text{ M}\Omega \quad R_C = 10 \text{ k}\Omega \quad R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

- Polarizzazione

$$V_B = 0.7 \text{ V}$$

$$I_C = \beta \cdot \frac{V_{CC} - V_B}{R_B} = 1 \text{ mA}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C \cdot R_C = 10 \text{ V}$$

- Guadagno

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{I_C}{V_T} \cdot (R_C // R_L) = -36.36$$

Quale e' il massimo segnale in ingresso prima che il transistor entri in zona di saturazione per $V_{CB}=0\text{V}$?

Applicando il segnale, la tensione sulla base e sul collettore risultano essere la somma del valore di polarizzazione e del segnale:

$$V_{Btot} = V_B + v_{ib}$$

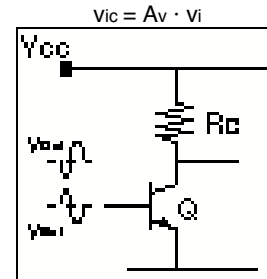
$$V_{Ctot} = V_C + v_{ic}$$

Ma il segnale sulla base (v_{ib}) e' uguale al segnale in ingresso

$$v_{ib} = v_i$$

Dinamica del segnale

Il segnale sul collettore viene calcolato sapendo il guadagno ed e' dato da:



Si nota che, essendo A_v negativo, quando V_{Btot} sale V_{Ctot} scende.

Si deve trovare il valore di v_i per cui $V_{Btot}=V_{Ctot}$

$$V_{Btot} = V_B + v_i$$

$$V_{Ctot} = V_C + A_v \cdot v_i$$

Uguagliando i due termini (per v_{iMAX}) si ottiene:

$$V_B + v_{iMAX} = V_C + A_v \cdot v_{iMAX}$$

$$v_{iMAX} = \frac{V_C - V_B}{1 - A_v} = \frac{10 - 0.7}{1 + 36.36} = 0.115 \text{ V}$$

Per verifica, si ha che per il valore di $v_{iMAX} = 0.115 \text{ V}$ si ha che

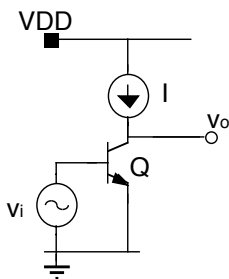
$$V_{Btot} = V_B + v_{iMAX} = 0.815 \text{ V}$$

$$V_{Ctot} = V_C + A_v \cdot v_{iMAX} = 0.815 \text{ V}$$

*** **Quesito 1:** risolvere l'esercizio per $R_C = 5 \text{ k}\Omega$

*** **Quesito 2:** Qual e' il valore ottimo di R_C per massimizzare la dinamica

Guadagno massimo di un transistor bipolare

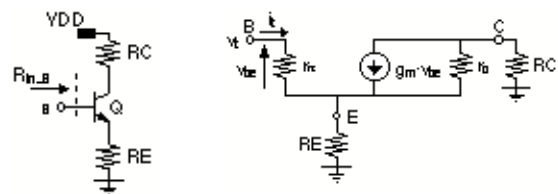


$$\frac{V_o}{V_i} = -g_m \cdot r_o = -\frac{I_C}{V_T} \cdot \frac{V_A}{I_C} = -\frac{V_A}{V_T}$$

- Il guadagno e' costante al variare della corrente

Impedenze di ingresso di un transistor bipolare

Impedenza di ingresso dalla base



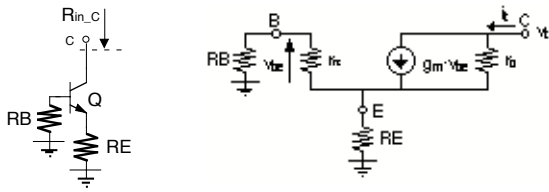
$$\left. \begin{aligned} v_t &= r_{\pi} i_t + v_e \\ v_e &= [g_m v_{be} + \frac{v_c - v_e}{r_o} + i_t] R_E \\ \frac{v_c - v_e}{r_o} + g_m v_{be} + \frac{v_c}{R_C} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{in_B} = \frac{v_t}{i_t} = r_{\pi} + R_E \cdot \frac{(1+\beta) \cdot r_o + R_C}{r_o + (R_C + R_E)}$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\beta) \cdot r_o &\gg R_C \\ r_o &\gg R_C + R_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{in_B} = r_{\pi} + \beta \cdot R_E$$

Impedenze di ingresso di un transistor bipolare

Impedenza di ingresso dal collettore



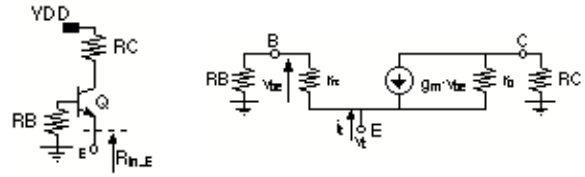
$$\left. \begin{aligned} -R_B \cdot i_b &= i_b r_{\pi} + R_E (i_b + i_t) \\ V_t &= (i_t - g_m V_{be}) r_o + (i_t + i_b) R_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{in_C} = \frac{V_t}{i_t} = r_o + R_E \frac{\beta r_o + r_{\pi} + R_B}{R_B + R_E + r_{\pi}}$$

$$g_m = \frac{\beta}{r_{\pi}} \quad \left. \begin{aligned} \beta \cdot r_o \gg r_{\pi} + R_B \\ r_{\pi} \gg R_B + R_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{in_C} \approx r_o + g_m \cdot R_E$$

Impedenze di ingresso di un transistor bipolare

Impedenza di ingresso dall'emettitore



$$\left. \begin{aligned} i_b &= -\frac{V_t}{r_{\pi} + R_B} \\ g_m V_{be} + \frac{V_c - V_t}{r_o} + \frac{V_c}{R_C} &= 0 \\ i_c &= -\frac{V_c}{R_C} \\ i_t &= -i_b - i_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{in_E} = \frac{V_t}{i_t} = \frac{(R_B + r_{\pi})(R_C + r_o)}{(1+\beta)r_o + R_C + R_B + r_{\pi}}$$

$$g_m = \frac{\beta}{r_{\pi}}$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\beta)r_o \gg R_C + R_B + r_{\pi} \\ r_o \gg R_C \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{in_E} = \frac{1}{g_m} + \frac{R_B}{\beta}$$

Impedenze di ingresso di un transistor bipolare

Tabella Riassuntiva

Ingresso: Base
Approssimazioni

$$R_{in} = r_{\pi} + \beta \cdot R_E$$

$$\left\{ \begin{aligned} (1+\beta) \cdot r_o \gg R_C \\ r_o \gg R_C + R_E \end{aligned} \right.$$

Ingresso: Emettitore

Approssimazioni

$$R_{in} = \frac{1}{g_m} + \frac{R_B}{\beta}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (1+\beta) \cdot r_o \gg R_C + R_B + r_{\pi} \\ r_o \gg R_C \end{aligned} \right.$$

Ingresso: Collettore

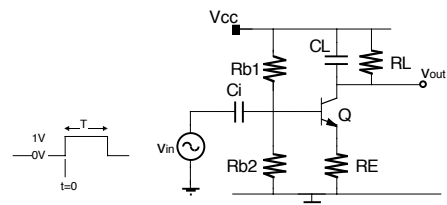
Approssimazioni

$$R_{in} = r_o \cdot (1 + g_m \cdot R_E)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta \cdot r_o \gg r_{\pi} + R_B \\ r_{\pi} \gg R_B + R_E \end{aligned} \right.$$

Esercizio

Esempio di transistorio (I)



$$R_{b1} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_L = 5 \text{ k}\Omega \quad V_{CC} = 10 \text{ V} \quad C_L = 100 \text{ pF}$$

$$R_{b2} = 5 \text{ k}\Omega \quad R_E = 8.6 \text{ k}\Omega \quad \beta = 100 \quad T = 1 \mu\text{s}$$

Valutare la forma d'onda in uscita considerando l'effetto di C_L (Ci venga considerato come condensatore di by-pass)

- Polarizzazione

$$V_B = 5 \text{ V}$$

$$I_E = \frac{V_B - V_{BE}}{R_E} = \frac{5 \text{ V} - 0.7 \text{ V}}{8.6 \text{ k}\Omega} = 0.5 \text{ mA}$$

$$V_C = V_{CC} - R_C \cdot I_C = 7.5 \text{ V}$$

- Comportamento in transitorio

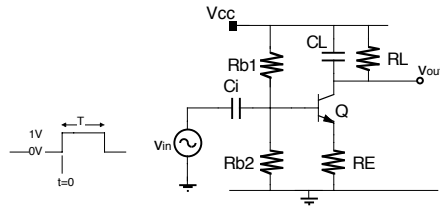
Il transistor non ha limitazioni in frequenza.

Il segnale di 1V viene aggiunto alla tensione di base e quindi viene subito trasmesso sull'emettitore.

La relativa corrente I_E ha la stessa forma del segnale di ingresso.

Esercizio

Esempio di transistorio (II)



Si tratta pertanto di un' onda quadra di livelli di corrente [0.5mA, 0.62mA, 0.5mA].

Per $0 < t < T$, l'uscita ha un andamento espresso dalla formula:

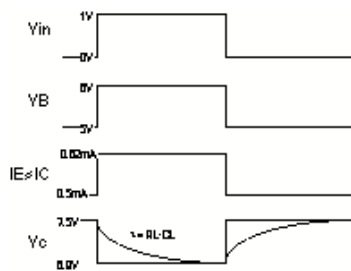
$$V_C(t) = 7.5 - 0.6 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Per $t = T$ il valore raggiunto e'

$$V_C(T) = 7.5 - 0.6 \cdot (1 - e^{-T/\tau}) = 6.9812V$$

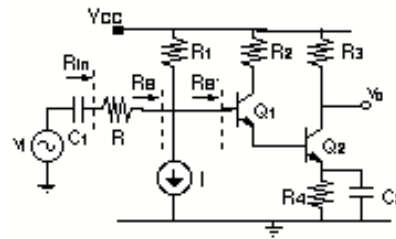
A questo punto, si ha un gradino in direzione opposta. L'uscita ha allora un andamento del tipo:

$$V_C(t) = 7.5 - (7.5 - 6.9812) \cdot e^{-(t-T)/\tau}$$



Esercizio (I)

(Lo stadio Darlington)



$V_{CC} = 15V$
 $I = 2mA$
 $R = 10k\Omega$
 $R_1 = 3.5k\Omega$
 $R_2 = 10k\Omega$
 $R_3 = 1.5k\Omega$
 $R_4 = 3k\Omega$
 $\beta_{Q1} = 20$
 $\beta_{Q2} = 50$

a - punto di lavoro del circuito

b - determinare in media frequenza le resistenze di ingresso $R_{B'}$, R_B , R_{in} e quella di uscita R_{out} .

c - determinare in media frequenza il guadagno di tensione di piccolo segnale v_o/v_i

d - Nell'ipotesi $C_2 \rightarrow \infty$, determinare il valore di C_1 tale che la funzione di trasferimento del circuito sia di tipo passa-alto con taglio a 1000Hz.

Determinare poi l'uscita v_o quando all'ingresso e' applicata una sinusoide di frequenza 1kHz ed ampiezza 100mV

• a

Su C_1 - R non passa corrente di polarizzazione.

Trascurando la corrente di base di Q_1 , I passa tutta su R_1 .

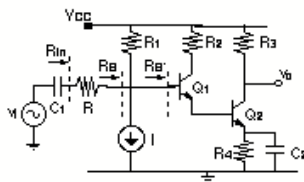
$$V_{B1} = V_{CC} - I \cdot R_1 = 15V - 2mA \cdot 3.5k\Omega = 8V$$

Q_1 e Q_2 operano in regione attiva $\Rightarrow V_{BE1} = V_{BE2} = 0.7V$

$$V_{E2} = V_{B1} - V_{BE1} - V_{BE2} = 6.6V$$

Esercizio (II)

(Lo stadio Darlington)



La corrente di emettitore di Q_2 e':

$$I_{E2} = \frac{V_{E2}}{R_4} = \frac{6.6V}{3k\Omega} = 2.2mA$$

Da cui:

$$I_{C2} = I_{E2} \cdot \frac{\beta_{Q2}}{\beta_{Q2} + 1} = 2.156mA$$

$$I_{B2} = \frac{I_{E2}}{\beta_{Q2} + 1} = 0.043mA = I_{E1}$$

$$V_{C2} = V_{CC} - R_3 \cdot I_{C2} = 11.766V$$

Si ricava ora:

$$I_{B1} = \frac{I_{E1}}{\beta_{Q1} + 1} = 2.0541\mu A \ll 2mA$$

Essendo $I_{B1} \ll I$, l'approssimazione di trascurare I_{B1} e' corretta.

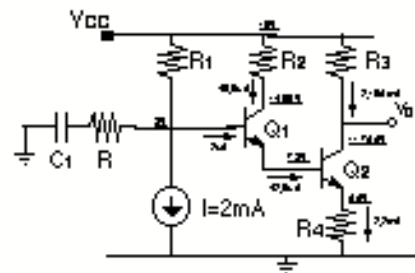
$$I_{C1} = I_{E1} \cdot \frac{\beta_{Q1}}{\beta_{Q1} + 1} = 40.952\mu A$$

$$V_{C1} = V_{CC} - R_2 \cdot I_{C1} = 14.59V$$

Esercizio (III)

(Lo stadio Darlington)

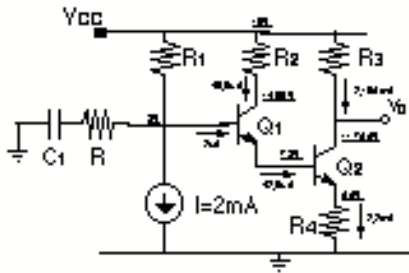
La polarizzazione del circuito e' quindi la seguente:



• Si puo' notare che la struttura dei due transistor Q_1 e Q_2 viene detta a Darlington. Con essa si riesce ad alzare il β del transistor con cui si opera. Infatti con due transistor i cui β valgono β_1 e β_2 , si ottiene una struttura il cui β_T vale $\beta_T = \beta_1 \cdot \beta_2$. Nel caso dell'esercizio, $\beta_1 = 20$, $\beta_2 = 50$, $\beta_T = 50 \cdot 20 = 1000$. Infatti $I_{BQ1} (2\mu A) \approx I_{CQ2} / \beta_T (2.1mA)$. Tale struttura presenta lo svantaggio di avere una V_{BE} globale che e' data dalla serie di due V_{BE} e quindi richiede 1.4V

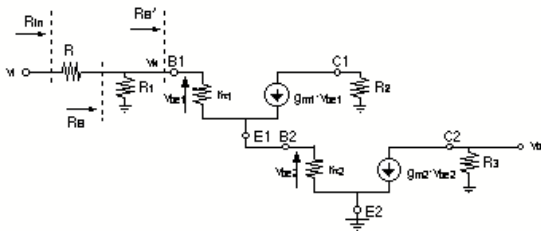
Esercizio (IV)

(Lo stadio Darlington)



• b

In media frequenza, cioe' a frequenze piu' alte di $f_z = 1/(2 \cdot \pi \cdot C_2 \cdot R_4)$ il circuito equivalente per piccolo segnale e' il seguente.

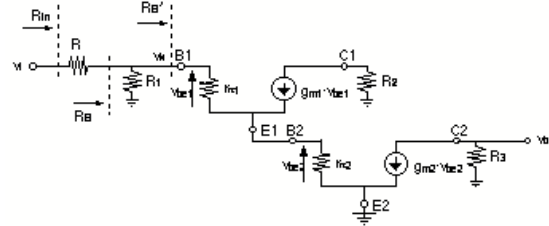


I valori dei componenti del transistor sono:

$$\begin{aligned} g_{m1} &= I_{C1}/V_T = 40.9 \mu A / 25 mV = 1.636 mA/V \\ r_{\pi 1} &= \beta_{Q1}/g_{m1} = 20 / 1.636 mA/V = 12.225 k\Omega \\ g_{m2} &= I_{C2}/V_T = 2.15 mA / 25 mV = 86 mA/V \\ r_{\pi 2} &= \beta_{Q2}/g_{m1} = 50 / 86 mA/V = 581 \Omega \end{aligned}$$

Esercizio (V)

(Lo stadio Darlington)



L'emettitore di Q2 risulta, dal punto di vista del segnale, collegato a massa.

L'impedenza vista dalla base di un transistor bipolare e' data dalla sua r_{π} piu' β volte l'impedenza che ha sull'emettitore.

L'impedenza sull'emettitore di Q1 e' uguale all'impedenza di ingresso di Q2 che in configurazione di emettitore comune corrisponde alla $r_{\pi 2}$. Ne consegue che si puo' scrivere:

$$R_B' = r_{\pi 1} + \beta_1 \cdot r_{\pi 2} = \beta_1 / g_{m1} + \beta_1 \cdot \beta_2 / g_{m2} = 18.035 k\Omega$$

R_B e' dato dal parallelo di R_B' e di R_1 :

$$R_B = R_B' // R_1 = \frac{R_B' \cdot R_1}{R_B' + R_1} = 2.931 k\Omega$$

R_{in} e' data dalla serie di R_B e di R :

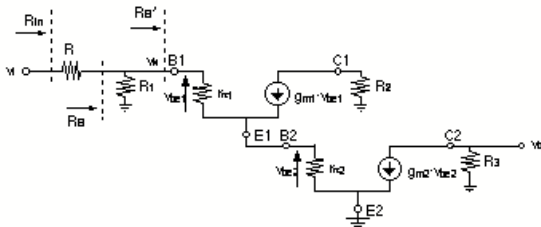
$$R_{in} = R + R_B = 12.931 k\Omega$$

L'impedenza di uscita e' data dal parallelo di R_3 con l'impedenza di uscita di Q2. Essendo l'impedenza vista dal collettore di Q2 ($= r_o = V_A / I_C$) molto maggiore di R_3 , ne consegue che, con buona approssimazione:

$$R_{out} = R_3$$

Esercizio (VI)

(Lo stadio Darlington)



• c

L'approssimazione di media frequenza implica che i condensatori operino come dei corti circuiti. Si fara' quindi riferimento allo schema di piccolo segnale usato prima.

Conviene dividere l'amplificazione in termini piu' semplici da calcolare, e cioe' scrivere:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_{be2}} \cdot \frac{V_{be2}}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_i}$$

Ora si puo' scrivere:

$$\frac{V_o}{V_{be2}} = -g_{m2} R_3 = -129$$

$$V_x = V_{be2} + V_{be1}$$

$$V_{be1} = V_x - (g_{m1} V_{be1} + V_{be1}/r_{\pi 1}) r_{\pi 2}$$

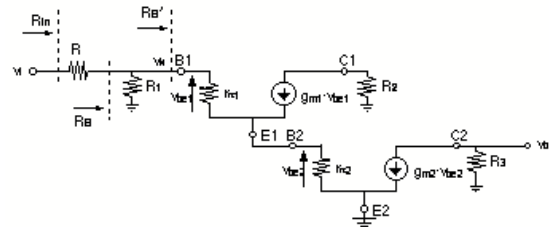
$$V_{be1} = \frac{V_x}{1 + g_{m1} r_{\pi 2} + r_{\pi 2}/r_{\pi 1}}$$

$$V_{be2} = V_x - V_{be1} = V_x \cdot \frac{g_{m1} r_{\pi 2} + r_{\pi 2}/r_{\pi 1}}{1 + g_{m1} r_{\pi 2} + r_{\pi 2}/r_{\pi 1}}$$

Essendo $r_{\pi 2} = \beta_2 / g_{m2} = \beta_2 V_T / I_2$, $r_{\pi 1} = \beta_1 / g_{m1} = \beta_1 V_T / I_1$ e $I_2 = \beta_2 I_1$, si ottiene che $r_{\pi 2}/r_{\pi 1} = 1/\beta_1$.

Esercizio (VII)

(Lo stadio Darlington)



Inoltre, $g_{m1} r_{\pi 2} = (I_1/V_T) (\beta_2 V_T/I_2) = 1$. Ne consegue che

$$\begin{aligned} V_{be2} &= V_x \cdot \frac{1 + 1/\beta_1}{1 + 1 + 1/\beta_1} \approx \frac{1}{2} \cdot V_x \\ \frac{V_{be2}}{V_x} &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Infine:

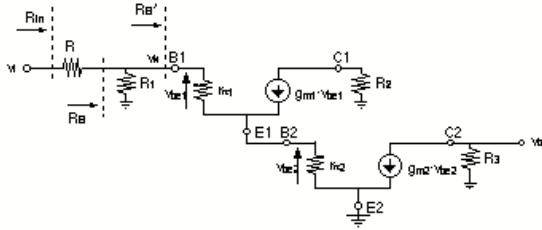
$$\frac{V_x}{V_i} = \frac{R_B}{R_B + R} = 0.2266$$

Pertanto:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_{be2}} \cdot \frac{V_{be2}}{V_x} \cdot \frac{V_x}{V_i} = -g_{m2} \cdot R_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B}{R_B + R} = -14.62$$

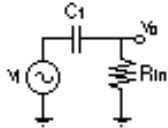
Esercizio (VIII)

(Lo stadio Darlington)



• d

Il polo determinato da C_1 e' quello relativo ad un circuito che puo' essere cosi' schematizzato:



Pertanto il polo corrisponde a $f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_{in} \cdot C_1} = 1 \text{ kHz}$.

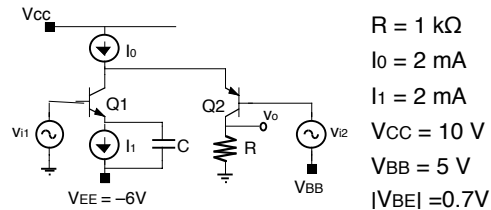
Da cui:

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_{in} \cdot 1 \text{ kHz}} = 12.308 \text{ nF}$$

L'uscita alla frequenza del polo avra' un'ampiezza pari ad $\frac{(v_o/v_i)}{\sqrt{2}}$ ed una fase di 45° a cui va sottratta la fase di -180° dovuta all'inversione di segno presente nell'espressione del guadagno.

Esercizio (I)

(Folded cascode)



$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$I_0 = 2 \text{ mA}$$

$$I_1 = 2 \text{ mA}$$

$$V_{CC} = 10 \text{ V}$$

$$V_{BB} = 5 \text{ V}$$

$$|V_{BE}| = 0.7 \text{ V}$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

a - il punto di lavoro dei due dispositivi per $v_{i1} = v_{i2} = 0$;b - le amplificazioni $\frac{v_o}{v_{i1}}$ e $\frac{v_o}{v_{i2}}$ a centro banda;c - la frequenza inferiore di taglio f_L di $\frac{v_o}{v_{i1}}$ per $C = 10 \mu\text{F}$.

a.

Si faccia l'ipotesi che entrambi i transistori siano polarizzati in zona attiva.

La tensione di base di Q_1 e' nulla; pertanto la tensione all'emettitore di Q_1 e':

$$V_{E1} = 0 - 0.7 \text{ V} = -0.7 \text{ V}$$

La tensione di base di Q_2 e' $V_{BB} = 5 \text{ V}$; pertanto la tensione all'emettitore di Q_2 e':

$$V_{E2} = (5 + 0.7) \text{ V} = 5.7 \text{ V} = V_{CC}$$

Essendo $\beta \rightarrow \infty$, le correnti di base sono nulle; pertanto la corrente in Q_1 e' $I_1 = 1 \text{ mA}$, mentre la corrente in Q_2 e':

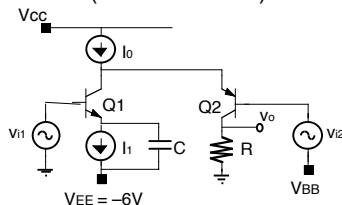
$$I_2 = I_0 - I_1 = 1 \text{ mA}$$

La tensione al nodo di uscita e':

$$V_o = V_{CC} - R \cdot I_2 = 1 \text{ V}$$

Esercizio (II)

(Folded cascode)



Si verifichi immediatamente che con i valori di tensione trovati entrambi i transistori sono in zona attiva, come si era supposto.

b.

Si calcolino anzitutto i parametri del modello equivalente per piccoli segnali.

Essendo $\beta \rightarrow \infty$, per entrambi i transistori $r_{\pi} \rightarrow \infty$. Inoltre, poiche' le correnti nei due transistori sono uguali, anche le transcondutanze sono uguali e date da:

$$g_{m1} = g_{m2} = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 40 \text{ mA/V}$$

$$\frac{v_o}{v_{i1}} = -g_{m1} \cdot \alpha \cdot R$$

$$\frac{v_o}{v_{i2}} = -\frac{g_{m2}}{1 + g_{m2} \cdot r_{o1}} \cdot R \approx 0$$

c.

Assumendo $C = 10 \mu\text{F}$, il guadagno si puo' scrivere come:

$$\frac{v_o}{v_{i1}} = -\frac{g_{m1}}{1 + g_{m1} \cdot \frac{1}{s \cdot C}} \cdot \alpha \cdot R = -\frac{s \cdot C \cdot R}{1 + \frac{s \cdot C}{g_{m1}}} \cdot \alpha \cdot R$$

Ne segue che:

$$f_L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot g_{m1}} = 636 \text{ Hz}$$

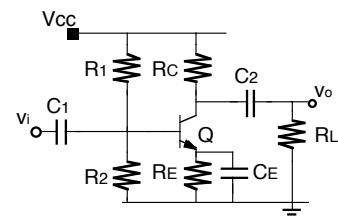
Esercizio (I)

Si assuma di utilizzare un transistor 2N2222A (il datasheet e' dato in appendice).

Si dimensioni la rete di polarizzazione in figura in modo da ottenere un guadagno di tensione a centro banda sia A_v

$$= \frac{v_o}{v_i} = -20, \text{ sul carico } R_L \text{ di } 1 \text{ k}\Omega.$$

Si progetti lo stadio in modo che la massima variazione della corrente di collettore sia del 20% quando la temperatura passa da 25° a 65° .



Dal datasheet si evince che viene consigliato il punto di funzionamento:

$$I_C = 1 \text{ mA}$$

$$V_{CE} = 10 \text{ V}$$

In questo punto risulta

$$h_{fe} = \beta = 50$$

ed inoltre si ha che:

	min	max	mean	@ 1kHz
h_{ie}	2k Ω	8k Ω	5k Ω	
h_{fe}	50	300	175	

Esercizio (II)

Per ottenere la stabilizzazione del punto di funzionamento, si impone ad I_C la variazione del 20% a cause delle variazioni di V_{BE} ($\frac{dV_{BE}}{dT} = -2.5\text{mV}/^\circ\text{C}$). La variazione ΔT relativa ad un'escursione della temperatura da 25°C a 65°C e' di 40°C . La corrispondente ΔV_{BE} risulta essere:

$$|\Delta V_{BE}| = -2.5\text{mV}/^\circ\text{C} \cdot 40^\circ\text{C} = -100\text{mV}$$

Dalla relazione $\Delta I_C/I_C = \frac{|\Delta V_{BE}|}{R_E \cdot I_C}$, segue che:

$$R_E = \frac{|\Delta V_{BE}|}{\frac{\Delta I_C}{I_C} \cdot I_C} \approx 500 \Omega$$

Si sceglie il valore di 470Ω che e' possibile con un componente discreto.

Il guadagno in tensione del circuito in esame e':

$$A_V = \frac{V_o}{V_i} = -g_m \cdot (R_C // R_L) = -20 = -g_m \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_L}}$$

La transconduttanza g_m si estrae da dati h_{ie} e h_{fe} precedentemente estratti dal datasheet (si noti che risulta essere un poco differente dal valore teorico I_C/V_T):

$$g_m = \frac{\beta}{r_{\pi}} = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} = 35\text{mA/V}$$

Si ricava quindi:

$$R_C = -\frac{1}{\frac{1}{R_L} + \frac{g_m}{A_V}} = 1.33\text{k}\Omega$$

Esercizio (III)

Si sceglie per R_C il valore di $1.2\text{k}\Omega$ che esiste a componente discreto.

Si puo' ora stabilire la tensione di alimentazione V_{CC} .

$$V_{CC} = I_C \cdot R_C + V_{CE} + I_C \cdot R_E = 11.67\text{V}$$

Si sceglie quindi $V_{CC}=12\text{V}$.

Si deve infine dimensionare il partitore di polarizzazione della base. Ponendo $V_B (= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot V_{CC})$ e $R_B (= R_1 // R_2)$ l'equivalente di Thevenin del partitore, si puo' ricavare la tensione V_B che deve essere:

$$V_B = R_B \cdot I_B + V_{BE} + R_E \cdot I_E = \left(\frac{R_B}{\beta} + R_E \right) \cdot I_C + V_{BE} \approx 1.35\text{V}$$

Si suppone di porre:

$$R_B = 30 \cdot R_E = 14.1 \text{ k}\Omega$$

Essendo:

$$V_B = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1} \cdot V_{CC} = R_B \cdot \frac{1}{R_1} \cdot V_{CC}$$

Si ricava quindi R_1 :

$$R_1 = 125.3\text{k}\Omega$$

Per R_1 si sceglie il valore di $120\text{k}\Omega$, esistente a componenti discreti

Si ricava quindi R_2 :

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_1}} = 15.9\text{k}\Omega$$

Per R_2 si sceglie infine il valore di $15\text{k}\Omega$, esistente a componenti discreti

Capitolo IV

Il transistor MOS

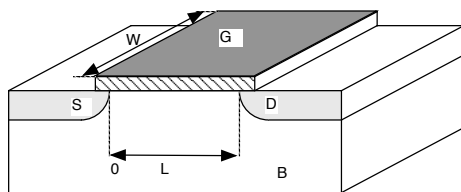
Indice

La tecnologia CMOS	2
Il funzionamento del transistor MOS	6
La polarizzazione del MOS	26
Stadi di guadagno con MOS	51
Lo specchio di corrente	68
Uso del carico attivo	82
Rapporto di reiezione per disturbi sull'alimentazione	85
La stadio differenziale	86
L' invertitore CMOS	94

La tecnologia CMOS

- Tecnologia molto diffusa nei circuiti digitali in quanto non presenta consumo di potenza statica
- In sistemi misti (analogico-digitali) la parte digitale e' spesso la piu' grande
- I circuiti digitali guidano lo sviluppo tecnologico (memorie)
- La tecnologia CMOS e' meno costosa delle altre tecnologia per circuiti integrati (Bipolare, BiCMOS)

Struttura del transistor MOS

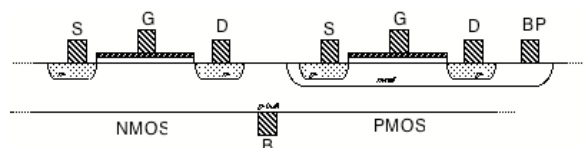


- W: larghezza di canale
- L: lunghezza di canale
- G=Gate; D=Drain; S=Source, B=Bulk;
- S e D sono drogati con lo stesso drogante (p o n)
- B e' drogato in modo opposto (n o p)

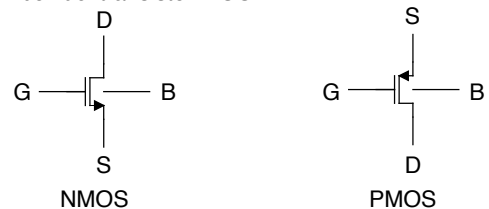
=> S/D drogati n, B drogato p ==> NMOS device

=> S/D drogati p, B drogato n ==> PMOS device

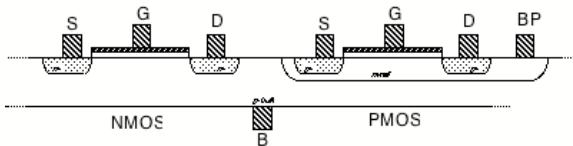
La tecnologia CMOS



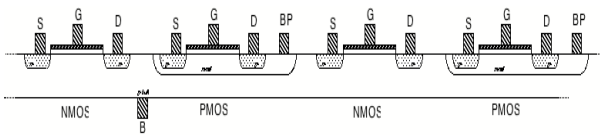
- Un dispositivo MOS e' simmetrico (D e S possono essere scambiati)
- Simboli dei transistor MOS



La tecnologia CMOS



- Il substrato p (p-bulk) e' polarizzato alla tensione piu' bassa disponibile sul circuito (massa)
 - Cio' evita la polarizzazione diretta della giunzione pn tra substrato (p) e le diffusioni n+ di source
 - Cio' fa si che la soglia del dispositivo NMOS device dipenda dalla V_{SB} per l'effetto body (con $V_{SB} > 0$)
- Il transistor PMOS e' realizzato in una n-well, che puo'/deve essere opportunamente polarizzata
Per ridurre l'effetto body, ciascun PMOS puo' essere realizzato in una well separata, e ciascuna well polarizzata al source (in modo da avere sempre $V_{SB}=0$)

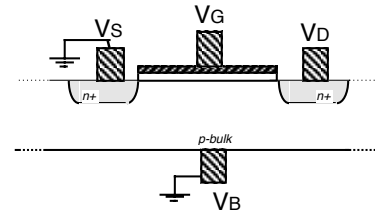


V - 5

October 27, 2007

Il funzionamento del transistor MOS

- Consideriamo un transistor NMOS



- Per semplicita' di seguito si usera':

$$V_S = 0$$

$$V_B = 0$$

- Il transistor MOS puo' trovarsi a funzionare in diverse zone operative, dipendentemente dalle tensioni di polarizzazione applicate ai suoi morsetti:

interdizione

sottosoglia

lineare

saturazione

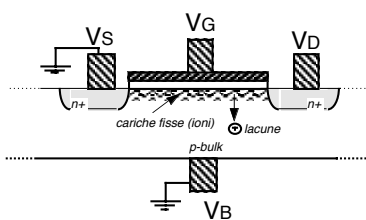
V - 6

October 27, 2007

Funzionamento del transistor MOS

Regione di interdizione

$$0 < V_{GS} < V_{TH}$$



- Aumentando V_{GS} , le lacune del substrato vengono allontanate dall'interfaccia dell'ossido
- Uno strato di inversione compare all' interfaccia. Questo strato e' pero' costituito da ioni (cioe' cariche fisse).
- Non e' pertanto possibile la conduzione

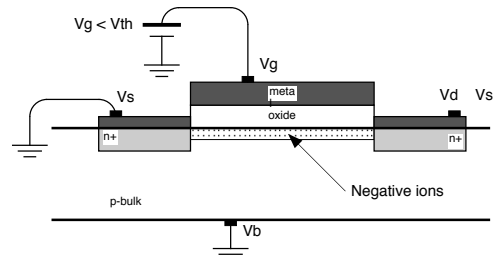
V - 7

October 27, 2007

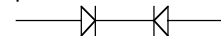
Funzionamento del transistor MOS

Debole inversione

$$V_{GS} \approx V_{TH}$$



- La struttura e' equivalente a:



- La corrente di saturazione dei diodi dipende dalle tensioni applicate

$$I_S = I_{D0} e^{q \cdot V_{GS} / (n \cdot k \cdot T)} e^{-q \cdot V_{DS} / (n \cdot k \cdot T)}$$

- Ne risulta

$$I_D = I_{D0} e^{q \cdot V_{GS} / (n \cdot k \cdot T)} e^{-q \cdot V_{DS} / (n \cdot k \cdot T)} [1 - e^{-q \cdot V_{DS} / (k \cdot T)}]$$

- Il transistor cosi' polarizzato viene utilizzato in applicazioni a bassissimi livelli di corrente, cioe' per sistemi a bassissima dissipazione di potenza (pacemaker, orologi, ecc. ...)

V - 8

October 27, 2007

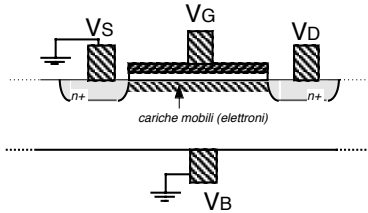
Funzionamento del transistor MOS

Regione lineare (o di triodo) (I)

$$V_{TH} < V_{GS}$$

$$V_{DS} \ll V_{GS} - V_{TH}$$

$$V_{OV} = V_{GS} - V_{TH} \quad \text{e' la tensione di overdrive}$$



- Aumentando V_{GS} , alcuni elettroni sono attratti all'interfaccia con l'ossido
- Questi elettroni creano un canale di cariche libere che collegano source e drain
- E' quindi possibile una corrente di conduzione
- $V_{DS} \ll V_{GS} - V_{TH}$ corrisponde ad avere una densita' di carica costante lungo tutto il dispositivo
- La densita' di carica nel dispositivo e'

$$Q_{ch} = C_{ox} \cdot (V_{GS} - V_{TH})$$

V - 9

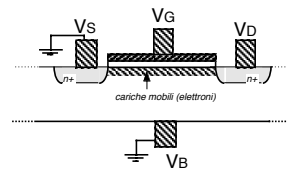
October 27, 2007

Funzionamento del transistor MOS

Regione lineare (II)

$$V_{TH} < V_{GS}$$

$$V_{DS} \ll V_{GS} - V_{TH}$$



- Relazione tensione-corrente

La corrente e' corrente di drift, cioe' dovuta al campo elettrico.

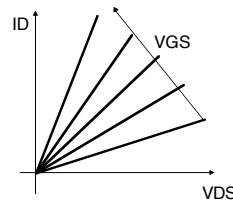
$$I = \frac{Q_{tot}}{\tau_{tr}}$$

$$Q_{tot} = Q_{ch} \cdot L \cdot W = C_{ox} \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot L \cdot W$$

$$\tau_{tr} = \frac{L}{v_{dr}} = \frac{L}{\mu \cdot E} = \frac{L}{\mu \cdot V_{DS}/L} = \frac{L^2}{\mu \cdot V_{DS}}$$

$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS}$$

$$\text{con } k = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L}$$



$$V_{DS} = R_{MOS} \cdot I_D$$

Il MOS si comporta come una resistenza di valore

$$R_{MOS} = \frac{1}{2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH})}$$

il cui valore e' controllato da V_{GS}

V - 10

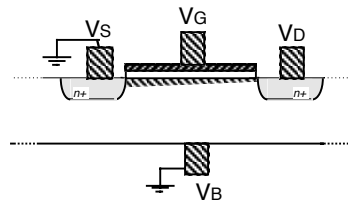
October 27, 2007

Funzionamento del transistor MOS

Regione lineare (III)

$$V_{TH} < V_{GS}$$

$$V_{DS} < V_{GS} - V_{TH}$$



- Mantenendo costante $V_{GS} (> V_{TH})$, un aumento di V_{DS} riduce la quantita' di carica immagazzinata nel canale vicino al drain
- Il canale rimane presente per la conduzione
- La relazione tensione-corrente puo' essere ancora valutata come prima

$$I = \frac{Q_{tot}}{\tau_{tr}}$$

$$Q_{tot} = \frac{(Q_s + Q_d) \cdot L}{2} \cdot W$$

$$Q_s = C_{ox} \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot L \cdot W \quad \text{carica al source}$$

$$Q_d = C_{ox} \cdot (V_{GD} - V_{TH}) \cdot L \cdot W \quad \text{carica al drain}$$

$$\tau_{tr} = \frac{L}{v_{dr}} = \frac{L}{\mu \cdot E} = \frac{L}{\mu \cdot V_{DS}/L} = \frac{L^2}{\mu \cdot V_{DS}}$$

$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot \left((V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

$$I_D = 2 \cdot k \cdot \left((V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

V - 11

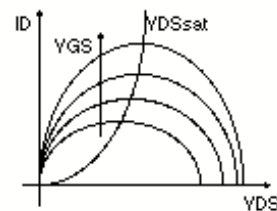
October 27, 2007

Funzionamento del transistor MOS

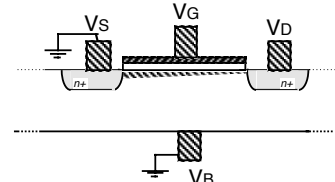
Regione lineare (IV)

$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot \left((V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

- Facendo il grafico I_D vs. V_{DS} si ottiene:



- V_{DSsat} e' la tensione per cui il canale risulta strozzato dalla parte del Drain



- Perche' il canale sia strozzato deve essere

$$V_{DSsat} = V_{GS} - V_{TH}$$

- Per $V_{DS} < V_{DSsat}$, il grafico (modello) ha senso.
- Per $V_{DS} > V_{DSsat}$ non ha senso fisico il fatto che aumentando la tensione, la corrente diminuisca.
 => Il modello analitico su esposto perde di significato

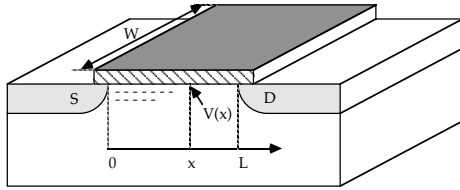
V - 12

October 27, 2007

Funzionamento del transistor MOS

Regione lineare (IV)

- Effetto body distribuito



- La tensione in eccesso alla tensione di soglia genera un accumulo di cariche all'interfaccia con l'ossido (strato di inversione) che dipende dalla posizione x del punto secondo la regola

$$Q_{inv}(x) = C_{ox} [V_{GS} - V_{TH}(x) - V(x)]$$

- $V(x)$ e' la caduta di tensione dal Source al punto x
- Si puo' definire la resistenza incrementale dell'elemento infinitesimo $[x, x + dx]$ nel canale come:

$$dR = \rho \frac{dx}{A} = \frac{dx}{qn(x)A\mu} = \frac{dx}{Q_{inv}(x)W\mu}$$

- La caduta di tensione sullo stesso elemento infinitesimo e' data da:

$$dV = I_D dR = I_D \frac{dx}{C_{ox}[V_{GS} - V_{TH}(x) - V(x)] W\mu}$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione lineare (V)

- D'altro canto la tensione di soglia V_{TH} cambia lungo il canale a causa del body effect:

$$V_{TH}(x) = V_{TH0} + \gamma [\sqrt{-2\Phi_F + V_{SB} - V(x)} - \sqrt{-2\Phi_F}]$$

- E' possibile ora integrare la relazione su V_{DS} e su x:

$$dV = I_D dR = I_D \frac{dx}{C_{ox}[V_{GS} - V_{TH}(x) - V(x)] \cdot W \cdot \mu}$$

$$V_{DS} = \int_0^L \Delta V \cdot dx$$

- Si ottiene che la corrente I_D e' data da:

$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot \left\{ [(V_{GS} - V_{TH0})V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2] - \frac{2}{3} \cdot \gamma [|-2\Phi_F + V_{DS}|^{3/2}] \right\}$$

- Trascurando il secondo termine della parentesi graffa si ottiene l'equazione di prima:

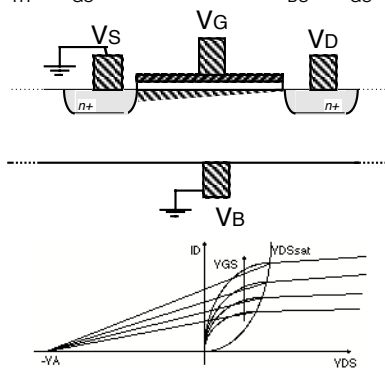
$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}$$

$$I_D = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione di saturazione (I)

$$V_{TH} < V_{GS} \quad V_{DS} = V_{GS} - V_{TH}$$



- Un ulteriore aumento di V_{DS} fa si che il canale si strozzi dalla parte del drain
- Gli elettroni si spostano ancora per conduzione in tutto il canale residuo e sono poi spinte al drain dal forte campo elettrico
- Il livello della corrente si ottiene calcolando la corrente della regione lineare per il valore di V_{DS} per cui il canale si strozza, cioe' per $V_{DS} = V_{GS} - V_{TH}$, si ottiene allora:

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

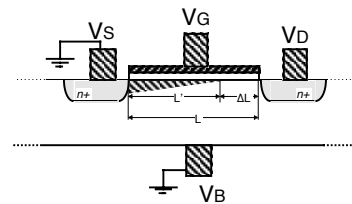
$$I_{Dsat} = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione di saturazione (II)

$$V_{TH} < V_{GS}$$

$$V_{DS} > V_{GS} - V_{TH}$$



- Il canale si strozza per il valore di V_{DS} dato da:

$$V_{DS} = V_{DSsat} = V_{GS} - V_{TH}$$

- Il livello di corrente e' fissato al valore che si ottiene per il la tensione V_{DSsat} ($V_{DSsat} = V_{GS} - V_{TH}$)

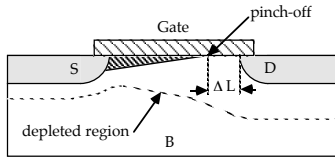
$$I_D = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

$$I_{Dsat} = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione di saturazione (III)

- Se $V_{DS} > V_{DSsat}$, il punto di strozzamento si sposta verso il source; la parte di V_{DS} che e' in eccesso a V_{DSsat} cade sulla regione di svuotamento (lunga ΔL) che si estende dal punto di strozzamento al drain.



$$\Delta L = \sqrt{\frac{2\epsilon}{qN_A}} (V_{DS} - V_{DSsat})$$

- La struttura puo' essere vista come un transistor con il punto di strozzamento al drain e con una lunghezza di canale $L - \Delta L$.
- La corrente I_D risulta essere data da:

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L - \Delta L} \right) (V_{GS} - V_{TH})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right) (V_{GS} - V_{TH})^2 \frac{L}{L - \Delta L}$$

$$I_D = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 \frac{L}{L - \Delta L}$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione di saturazione (IV)

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 \cdot \frac{L}{L - \Delta L}$$

$$\frac{L}{L - \Delta L} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2\epsilon}{qN_A} \frac{(V_{DS} - V_{sat})}{L^2}}}$$

$$\approx 1 + \frac{\epsilon}{qN_A L^2} (V_{DS} - V_{DSsat})$$

- Trascurando V_{DSsat} rispetto a V_{DS}

$$\frac{L}{L - \Delta L} = 1 + \lambda V_{DS}$$

$$\text{con } \lambda = \frac{\epsilon}{q N_A L^2}$$

- Solitamente $\lambda \sim L^{-a}$ con $1 < a < 2$
- λ e' il parametro di modulazione di canale e vale $5 \cdot 10^{-2} V^{-1}$

$$I_D = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \frac{W}{L} \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 \cdot (1 + \lambda V_{DS})$$

$$I_{Dsat} = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 \cdot (1 + \lambda V_{DS})$$

Funzionamento del transistor MOS

Regione di saturazione (V)

- Per ottenere la continuita' nelle espressioni della I_D e nelle sue derivate, il termine $(1 + \lambda V_{DS})$ viene aggiunto anche nell'espressione della corrente in regione lineare:

$$I_D = \mu \cdot C_{ox} \cdot \left(\frac{W}{L} \right) \left[(V_{GS} - V_{TH}) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right] (1 + \lambda V_{DS})$$

- $k' = \mu \cdot C_{ox}$ viene indicato come parametro tecnologico di transconduttanza
- Per $t_{ox} = 75 \text{ nm}$ e assumendo un amobilita' superficiale $\mu_n = 750 \text{ cm}^2/V \text{ sec.}$, e $\mu_p = 240 \text{ cm}^2/V \text{ sec.}$ si hanno i valori:

$$k'_n = 35.7 \mu \text{ A/V}^2$$

$$k'_p = 11.4 \mu \text{ A/V}^2$$

La tensione di soglia

- La tensione di soglia e' la tensione V_{GS} minima necessaria per creare un canale conduttivo tra drain e source.
- La tensione di soglia si esprime come:

$$V_{TH} = V_{TH0} + \gamma \cdot \left[\sqrt{|-2 \cdot \Phi_F + V_{SB}|} - \sqrt{2 \Phi_F} \right]$$

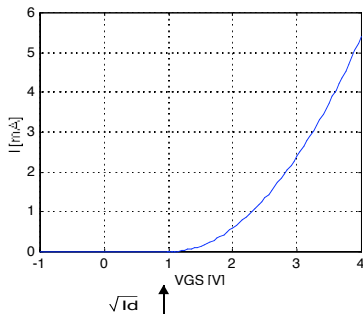
$$\gamma = \frac{\sqrt{2 \cdot q \cdot \epsilon \cdot N_A}}{C_{ox}}$$

- La tensione di soglia dipende dalla tensione V_{SB} per il cosiddetto effetto-body
- γ e' il coefficiente dell'effetto body
- Il valore minimo per la tensione di soglia corrisponde alla condizione $V_{SB} = 0$

Caratteristiche I-V

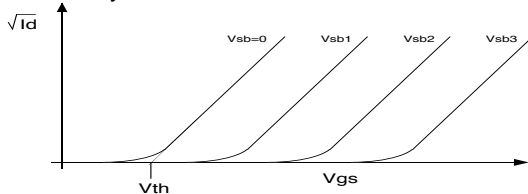
Caratteristica di ingresso (I_D vs. V_{GS}) in saturazione

- Da notare che non viene data (I_G vs. V_{GS}) in quanto $I_G=0$



$$I_D \approx \frac{1}{2} \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} (V_{GS} - V_{TH})^2$$

- Effetto body



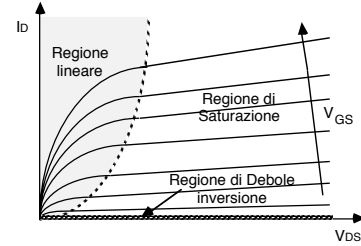
- Aumentando V_{SB} , aumenta V_{TH}

V - 21

October 27, 2007

Caratteristiche I-V

Caratteristica di uscita (I_D vs. V_{DS})



- Si ha una famiglia di curve, ciascuna corrispondente ad un valore di V_{GS}
- Il transistor NMOS presenta quattro regioni di funzionamento:

- Off: $V_{GS} \ll V_{TH}$ $I_D = 0$

- Debole inversione: $V_{GS} \approx V_{TH}$

$$I_D = I_{D0} e^{qV_{GS}/(n \cdot k \cdot T)} e^{-qV_{DS}/(n \cdot k \cdot T)} [1 - e^{-qV_{DS}/(k \cdot T)}]$$

- Regione lineare: $V_{TH} < V_{GS} < V_{DS} + V_{TH}$

$$I_D = 2 \cdot k \cdot \left((V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

- Regione di saturazione: $V_{TH} < V_{GS} < V_{DS} + V_{TH}$

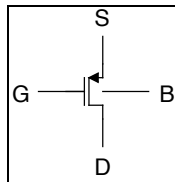
$$I_D = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

V - 22

October 27, 2007

Il transistor PMOS

- Il transistor PMOS si comporta come quello NMOS, ammesso di invertire tutti i segni.



- Il transistor PMOS ha una tensione di soglia negativa $V_{TH} < 0$
- Il transistor PMOS presenta quattro regioni di funzionamento:

- Off: $V_{GS} \gg V_{TH}$ $I_D = 0$

- Debole inversione: $V_{GS} \approx V_{TH}$

$$I_D = I_{D0} e^{qV_{GS}/(n \cdot k \cdot T)} e^{-qV_{DS}/(n \cdot k \cdot T)} [1 - e^{-qV_{DS}/(k \cdot T)}]$$

- Regione lineare: $V_{TH} > V_{GS} > V_{DS} + V_{TH}$

$$I_D = 2 \cdot k \cdot \left((V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right)$$

- Regione di saturazione: $V_{TH} > V_{GS} > V_{DS} + V_{TH}$

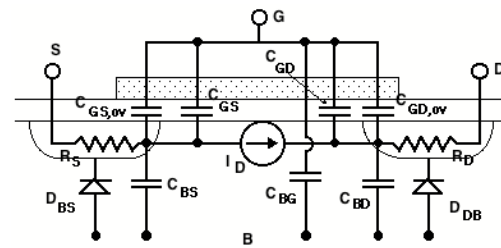
$$I_D = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

- Il circuito equivalente di piccolo segnale e' identico a quello dell' NMOS (come nel caso NPN e PNP)

V - 23

October 27, 2007

Circuito equivalente ad ampio segnale



Effetti non-lineari

- Generatori di corrente
- Diodi
- Capacita' C_{GS} , C_{BG} , C_{GD} , C_{BS} , C_{BD}

Effetti lineari (in 1° approssimazione)

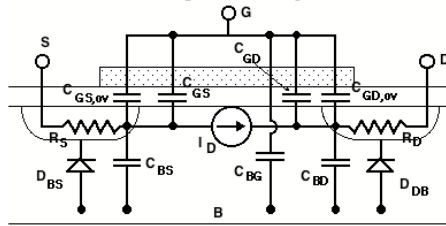
- Resistenze di contatto (R_D , R_S)
 $R_D \approx R_S \approx 100 \Omega$
- Capacita' di overlap ($C_{GS,ov}$, $C_{GD,ov}$)

$$C_{GS,ov} = C_{GD,ov} = W \cdot x_{ov} \cdot C_{ox}$$

V - 24

October 27, 2007

Circuito equivalente ad ampio segnale



- I diodi sono polarizzati in inversa; la corrente inversa e' dominata dal termine di generazione e ricombinazione

$$I_{GR} = A \frac{q n_i x_j}{2 \tau_0}$$

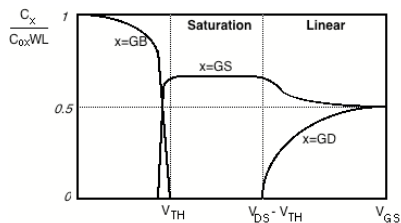
A : area della giunzione

x_j : larghezza della regione di svuotamento

τ_0 : tempo di vita medio dei portatori minoritari

- I_{GR} raddoppia per un aumento di 10 K (tipicamente) a temperatura ambiente $I_{GR}/A = 10^{-15} \text{ A}/\mu\text{m}^2$

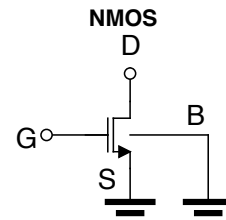
Capacita' di Gate



V - 25

October 27, 2007

La polarizzazione del MOS



- Valutare V_{GS}

$$V_{GS} > V_{TH} ?$$

SI \implies transistor ON

NO \implies transistor OFF

Se il transistor e' ON:

$$V_{GS} = V_{TH} + V_{ov}$$

$$V_{ov} \approx V_{DSSat}$$

- Valutare V_{DS}

$$V_{DS} > V_{DSSat} ?$$

SI \implies regione di saturazione

NO \implies regione lineare

V - 26

October 27, 2007

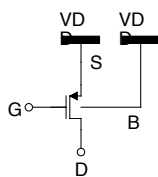
Studio della polarizzazione di transistor MOS

PMOS

$$V_{TH} < 0$$

$$V_{GS} < 0$$

$$V_{DS} < 0$$



- Valutare V_{GS}

$$V_{GS} < V_{TH} ? \quad (|V_{GS}| > |V_{TH}| ?)$$

SI \implies transistor ON

NO \implies transistor OFF

Se il transistor e' ON:

$$V_{GS} = V_{TH} + V_{ov}$$

$$V_{ov} \approx V_{DSSat}$$

- Valutare V_{DS}

$$V_{DS} < V_{DSSat} ? \quad (|V_{DS}| > |V_{DSSat}| ?)$$

SI \implies regione di saturazione

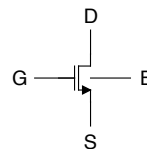
NO \implies regione lineare

V - 27

October 27, 2007

QUIZ

$$V_{TH_NMOS} = 1V$$

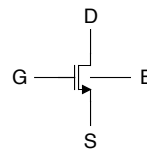


$$V_G = 2V$$

$$V_S = 0V$$

$$V_D = 3V$$

regione di operazione = ?

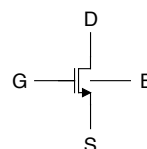


$$V_G = 2V$$

$$V_S = 0V$$

$$V_D = 0.5V$$

regione di operazione = ?



$$V_G = 0.5V$$

$$V_S = 0V$$

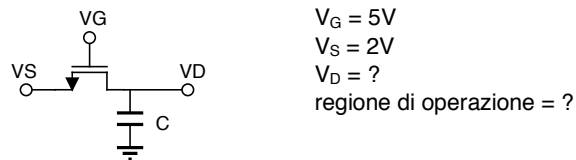
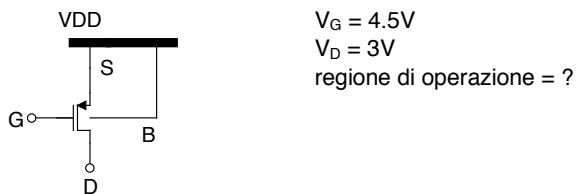
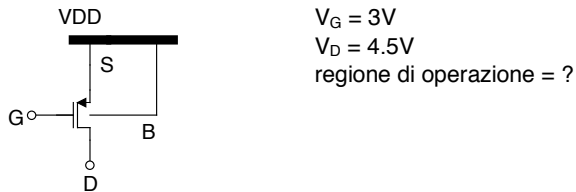
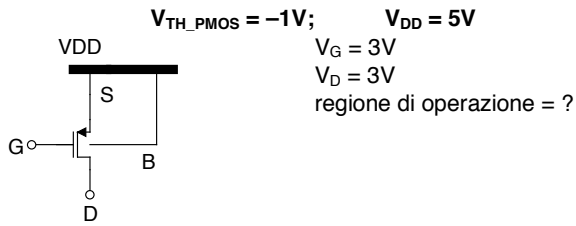
$$V_D = 3V$$

regione di operazione = ?

V - 28

October 27, 2007

QUIZ



La polarizzazione del transistor MOS

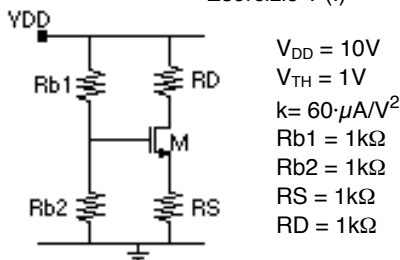
- 1• Si fa dapprima un'ipotesi di funzionamento del transistor (regione lineare, regione di saturazione, o di transistor spento)
- 2• Si risolve la polarizzazione del circuito congruentemente con l'ipotesi fatta
- 3• Si verifica se l'ipotesi e' verificata.

Se l'ipotesi non e' verificata allora l'ipotesi fatta e' falsa e si deve ripartire con un'altra ipotesi

Se l'ipotesi e' verificata allora l'ipotesi fatta e' vera e la soluzione trovata e' corretta

Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 1 (I)



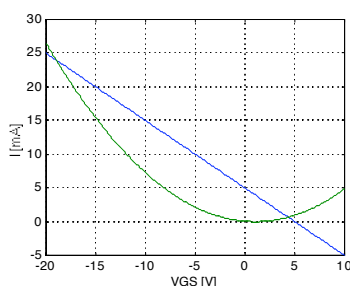
Punto di lavoro

$$V_G = V_{DD} \cdot \frac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = 5V$$

$$V_G = V_{GS} + R_S \cdot I_M \implies I_M = \frac{V_G - V_{GS}}{R_S}$$

Suppongo M in saturazione

$$I_M = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$



Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 1 (II)

La corrente I_M e' la stessa e quindi uguagliando le due equazioni si ottiene:

$$V_G - V_{GS} = R_S \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2$$

$$k \cdot R_S \cdot (V_{GS}^2 - 2 \cdot V_{GS} \cdot V_{TH} + V_{TH}^2) + V_{GS} - V_G = 0$$

$$k \cdot R_S \cdot V_{GS}^2 + V_{GS} \cdot (1 - 2 \cdot k \cdot R_S \cdot V_{TH}) + k \cdot R_S \cdot V_{TH}^2 - V_G = 0$$

E' un'equazione di 2° grado in V_{GS} con due soluzioni

Le due soluzioni sono:

$$V_{GS} = [4.333V, -19V]$$

- Tra le due soluzioni, quella di $-19V$ non e' valida in quanto per $V_{GS} < V_{TH}$ il modello di transistor MOS usato non e' valido, essendo il transistor spento.
- L'unica soluzione valida e' quella di $4.33V$ che corrisponde infatti ad una zona di funzionamento in cui il transistor e' attivo ($V_{GS} > V_{TH}$)

$$I_M = \frac{V_G - V_{GS}}{R_S} = 670 \mu A$$

$$V_D = V_{DD} - I_M \cdot R_D = 10 - 670 \mu A \cdot 1k\Omega = 9.33V$$

Polarizzazione del transistor MOS

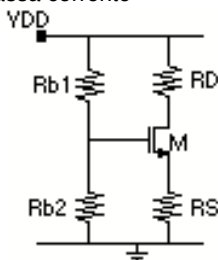
Esercizio 1 (III)

Polarizzazione a bassa corrente

- Lo stesso circuito si può polarizzare con:

$$R_{b1} = 100k\Omega$$

$$R_{b2} = 100k\Omega$$



- La corrente di gate del transistor MOS è comunque nulla.
- La tensione del gate non cambia
- Il punto di lavoro del transistor MOS non cambia (ha la stessa tensione di gate e, quindi, lo stesso livello di corrente)
- La corrente consumata nel ramo di polarizzazione (R_{b1} e R_{b2}) diminuisce di un fattore 100.
- La R_{in} aumenta di un fattore 100
- Lo stesso concetto non può essere applicato con un transistor bipolare in quanto la corrente di base è non nulla e si vuole che sia trascurabile rispetto a quella del ramo di polarizzazione.

Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 2 (I)

$$V_{DD} = 5V$$

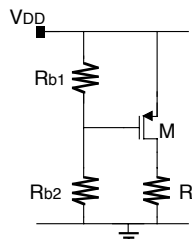
$$V_{TH} = -1V$$

$$k = 10 \cdot mA/V^2$$

$$R_{b1} = 1.5M\Omega$$

$$R_{b2} = 3M\Omega$$

$$R_D = 500\Omega$$



- Studiare la polarizzazione

La tensione di gate è data dal partitore su R_{b2} - R_{b1}

$$V_G = V_{DD} \cdot \frac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = 3.33V$$

La V_{GS} risulta pertanto:

$$V_{GS} = 3.33V - 5V = -1.67V$$

Il transistor è quindi acceso.

Si suppone allora il transistor in saturazione.

La corrente è allora data da:

$$I_M = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = 10 \cdot mA/V^2 \cdot (-1.67V + 1V)^2 = 4.489mA$$

Da ciò ne deriva la tensione sul drain

$$V_D = I_M \cdot R_D = 4.489mA \cdot 500\Omega = 2.244V$$

Si verifica anche che il transistor è in saturazione

$$V_{GD} = 3.33V - 2.24V = 1.09V \quad \text{OK!!}$$

Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 2 (II)

$$V_{DD} = 5V$$

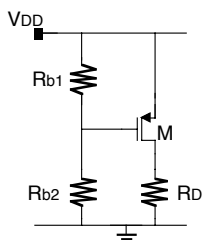
$$V_{TH} = -1V$$

$$k = 10 \cdot mA/V^2$$

$$R_{b1} = 1.5M\Omega$$

$$R_{b2} = 3M\Omega$$

$$\implies R_D = 10k\Omega \quad \leftarrow$$



- Come nel caso precedente si ottiene:

$$V_G = V_{DD} \cdot \frac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = 3.33V$$

$$V_{GS} = 3.33V - 5V = -1.67V$$

Supponendo il transistor in saturazione la corrente è:

$$I_M = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = 10 \cdot mA/V^2 \cdot (-1.67V + 1V)^2 = 4.489mA$$

Da ciò ne deriva la tensione sul drain

$$V_D = I_M \cdot R_D = 4.489mA \cdot 10k\Omega = 44.89V$$

Si ottiene un'incongruenza con l'ipotesi di partenza.

Allora bisogna cambiare ipotesi. Si suppone quindi che il transistor operi in zona lineare.

Si scrive allora l'equazione:

$$I_D = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_S}$$

Si risolve per V_D e si ottiene:

$$[V_{DS} = 0.038113V, V_{DS} = 1.31189V]$$

La prima soluzione è quella valida in quanto la seconda non corrisponde ad una polarizzazione in zona lineare.

Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 2 (III)

$$V_{DD} = 5V$$

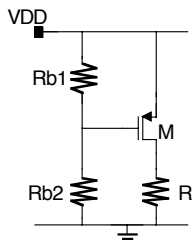
$$V_{TH} = -1V$$

$$k = 10 \cdot mA/V^2$$

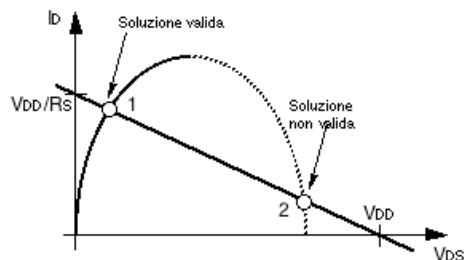
$$R_{b1} = 1.5M\Omega$$

$$R_{b2} = 3M\Omega$$

$$\implies R_D = 10k\Omega \quad \leftarrow$$



La risoluzione grafica è illustrata di seguito

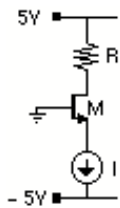


Si ottengono due soluzioni:

- La soluzione 1 appartiene alla zona in cui il modello matematico ($I_D = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH}) \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}$) descrive il comportamento del circuito ed è quella corretta
- La soluzione 2 appartiene alla zona in cui il funzionamento del circuito non è descritto dal modello matematico e quindi non è corretta.

Polarizzazione del transistor MOS

Esercizio 3 (I)



$$V_{TH} = 1.5V$$

$$I = 10mA$$

Quale e' il massimo valore di R per tenere il transistor M in saturazione ?

La tensione di drain e' data da:

$$V_D = 5V - I \cdot R$$

La tensione minima di saturazione del drain e':

$$V_{Dmin} = V_G - V_{TH} = 0V - 1.5V = -1.5V$$

Ne risulta che R_{max} e':

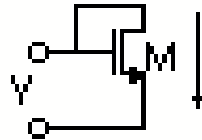
$$R_{max} = \frac{5V - V_{Dmin}}{I} = \frac{6.5V}{10mA} = 650\Omega$$

V - 37

October 27, 2007

Caratteristica ingresso-uscita

Esercizio 4



$$V_{TH} = 1V$$

$$k = 2mA/V^2$$

Si disegni la caratteristica I vs. V per $V=[-2V, 5V]$

Il transistor se e' acceso e' in saturazione in quanto:

$$V_{DS} = V_{GS} > V_{GS} - V_{TH}$$

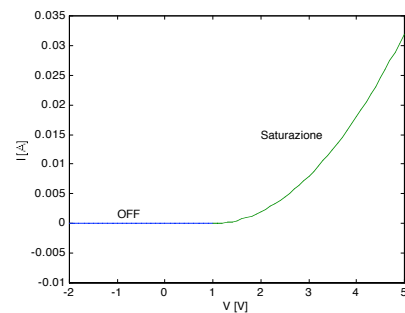
Per $V < V_{TH}$ il transistor e' spento e quindi:

$$I = 0$$

Per $V > V_{TH}$ il transistor e' acceso e la corrente I e' data da:

$$I = k \cdot (V - V_{TH})^2$$

Il grafico risulta quindi:

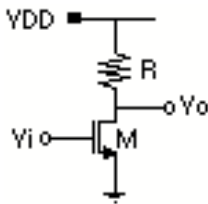


V - 38

October 27, 2007

Caratteristica ingresso-uscita

Esercizio 5 (I)



$$V_{TH} = 1V$$

$$k = 2mA/V^2$$

$$R = 2k\Omega$$

$$V_{DD} = 10V$$

Calcolare $V_o(V_i)$

- Per $V_i < 1V$, il transistor e' off ($V_i = V_{GS} < V_{TH}$) e pertanto:

$$V_o = V_{DD}$$

- Per $V_i > 1V$ il transistor puo' condurre.

Si suppone M in saturazione. La corrente e' data da:

$$I = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = k \cdot (V_i - V_{TH})^2$$

Ne segue che V_o e' dato da:

$$V_o = V_{DD} - R \cdot I = V_{DD} - R \cdot k \cdot (V_i - V_{TH})^2$$

M e' in saturazione finche'

$$V_{DS} > V_{GS} - V_{TH}$$

$$V_o > V_i - V_{TH}$$

Cioe' per

$$V_{DD} - R \cdot k \cdot (V_i - V_{TH})^2 > V_i - V_{TH}$$

$$R \cdot k \cdot (V_i - V_{TH})^2 + (V_i - V_{TH}) - V_{DD} < 0$$

V - 39

October 27, 2007

Caratteristica ingresso-uscita

Esercizio 5 (II)

Le soluzioni di $(R \cdot k \cdot (V_i - V_{TH})^2 + (V_i - V_{TH}) - V_{DD} = 0)$ sono:

$$V_i - V_{TH} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot R \cdot k \cdot V_{DD}}}{2 \cdot R \cdot k}$$

La soluzione e' quella con il '+' in quanto deve essere

$$V_i > V_{TH}$$

Si ottiene quindi $V_i = 2V$

Quindi per $1V < V_i < 2V$ il transistor e' in saturazione.

- Per $2V < V_i$ il transistor opera in regione lineare

$$I = 2 \cdot k \cdot \left[(V_{GS} - V_{TH}) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right] = 2 \cdot k \cdot \left[(V_i - V_{TH}) V_o - \frac{V_o^2}{2} \right]$$

$$V_o = V_{DD} - R \cdot I = V_{DD} - R \cdot \left(2 \cdot k \cdot \left((V_i - V_{TH}) \cdot V_o - \frac{V_o^2}{2} \right) \right)$$

$$V_o = V_{DD} - 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH}) \cdot V_o + k \cdot R \cdot V_o^2$$

$$k \cdot R \cdot V_o^2 - (1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH})) \cdot V_o + V_{DD} = 0$$

$$V_o = \frac{(1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH})) \pm \sqrt{(1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH}))^2 - 4 \cdot k \cdot R \cdot V_{DD}}}{2 \cdot k \cdot R}$$

La soluzione corretta e' quella con il '-' (aumentando V_i , V_o deve diminuire)

$$V_o = \frac{(1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH})) - \sqrt{(1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH}))^2 - 4 \cdot k \cdot R \cdot V_{DD}}}{2 \cdot k \cdot R}$$

V - 40

October 27, 2007

Caratteristica ingresso-uscita

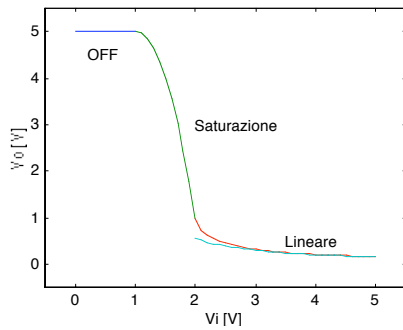
Esercizio 5 (III)

Come approssimazione si potrebbe trascurare V_o^2 , e ottenere:

$$V_o = V_{DD} - 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH}) \cdot V_o$$

E quindi:

$$V_o = \frac{V_{DD}}{1 + 2 \cdot k \cdot R \cdot (V_i - V_{TH})}$$

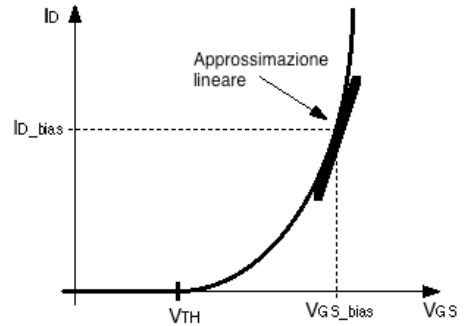


V - 41

October 27, 2007

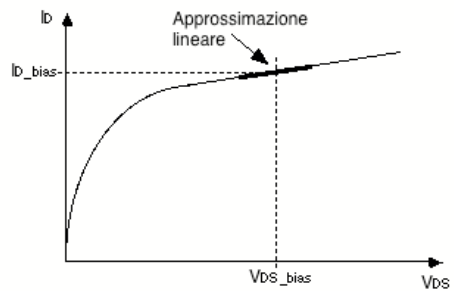
Linearizzazione delle caratteristiche del transistor MOS

- Caratteristica di ingresso



la caratteristica di ingresso e' molto non-lineare

- Caratteristica d'uscita



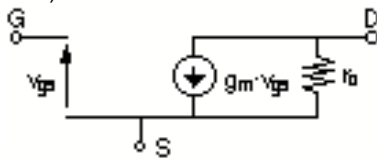
la caratteristica di uscita e' molto lineare

V - 42

October 27, 2007

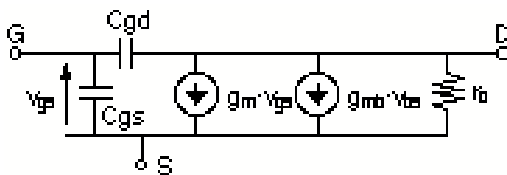
Circuito equivalente per piccolo segnale del transistor MOS

- Approssimazione di ordine zero (indipendente dalla frequenza)



E' uguale al circuito equivalente del transistor bipolare nel caso di $\beta = \infty$, che comporta $r_{\pi} = \infty$

- Approssimazione di prim'ordine (dipendente dalla frequenza)

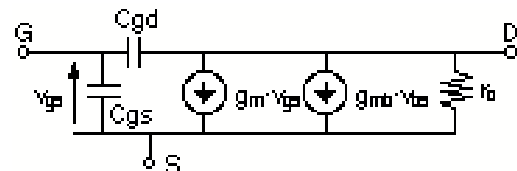


- Un parametro tipico per valutare la velocita' di risposta del transistor MOS e' la frequenza di transizione (f_T)
 $f_T = g_m / C_{GS}$
- f_T e' definita come la frequenza del polo del guadagno di corrente nella configurazione a source comune

V - 43

October 27, 2007

Circuito equivalente per piccolo segnale del transistor MOS



- La linearizzazione del generatore di corrente risulta
 $I_D = I_D(V_{GS}, V_{DS}, V_{BS})$
- Tre generatori di corrente controllati da tensioni sono necessari:

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} \quad \text{transconduttanza}$$

$$g_{ds} = \frac{1}{r_O} = \frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}} \quad \text{conduttanza d'uscita del drain}$$

$$g_{mb} = \frac{\partial I_D}{\partial V_{BS}} \quad \text{transconduttanza di substrato}$$

- Tutti questi parametri dipendono dal punto di lavoro (polarizzazione) del transistor

V - 44

October 27, 2007

Circuito equivalente per piccolo segnale

Transconduttanza (g_m)

- Nella regione sottosoglia:

$$g_m = \frac{I_d}{n \frac{kT}{q}}$$

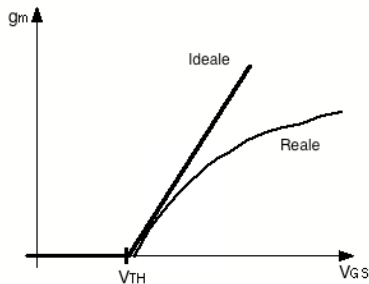
(come un transistor bipolare con $n > 1$, $n \approx 2$)

- Nella regione lineare:

$$g_m = \mu \cdot C_{ox} \cdot \left(\frac{W}{L}\right) \cdot V_{DS} = 2 \cdot k \cdot \left(\frac{W}{L}\right) \cdot V_{DS}$$

- Nella regione di saturazione:

$$g_m = \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L}\right) \cdot (V_{GS} - V_{TH}) = 2 \cdot k \cdot \left(\frac{W}{L}\right) \cdot (V_{GS} - V_{TH})$$



- Nelle situazioni reali la g_m e' minore del valore indicato dalle equazioni

Circuito equivalente per piccolo segnale

Transconduttanza (g_m)

- Inoltre g_m dipende da μ che a sua volta e' funzione della temperatura, del campo elettrico trasversale e del campo elettrico medio laterale

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/2} \left[1 + \frac{E_y}{E_{crit}}\right]^{-m} \left[\frac{1}{1 + \frac{V_{DS}}{L E_{sat}}}\right]$$

- SPIICE usa un'equazione di fitting:

$$\mu = \mu_0 \left[\frac{U_{crit} \diamond \epsilon_{si}}{C_{ox}(V_{GS} - V_{on} - U_{tra} - V_{DS})} \right]^{U_{exp}}$$

Circuito equivalente per piccolo segnale

Conduttanza d'uscita del drain (g_{ds})

- Nella regione lineare

$$g_{ds} = \mu \cdot C_{ox} \cdot \left(\frac{W}{L}\right) \cdot (V_{GS} - V_{TH} - V_{DS})$$

$$g_{ds} = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH} - V_{DS})$$

- Nella regione di saturazione (appros. del 1° ordine)

$$g_{ds} = \lambda \cdot I_D$$

Effetti del second'ordine:

- La riduzione della lunghezza di canale e' stata calcolata considerando solo la caduta di tensione laterale. Una piu' accurata analisi da come risultato:

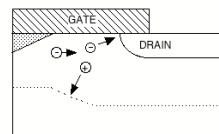
$$\frac{1}{\Delta L} \approx \frac{1}{\Delta L(1^{st} \text{ order})} + \frac{C_{ox}}{\epsilon_s} \left[\frac{\alpha(V_{DS} - V_{GS}) + \beta(V_{GS} - V_{sat})}{V_{DS} - V_{sat}} \right]$$

- La tensione di soglia dipende da V_{DS} (per canali corti).
- La mobilita' dipende dal campo laterale medio (V_{DS}/L).
- L'effetto valanga aumenta I_D .

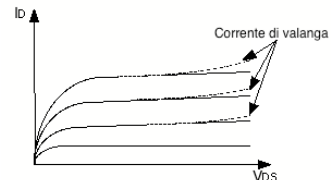
Circuito equivalente per piccolo segnale

Conduttanza d'uscita del drain (g_{ds})

Correnti di valanga



- Cariche mobile, accelerate dal campo elettrico nella zona di svuotament del drain creano, per ionizzazione da impatto, delle coppie elettrone-lacuna
- Cio' comporta un aumento della corrente di drain I_D e della corrente di substrato I_B



$$I_B = \Delta I_D \propto \Delta L$$

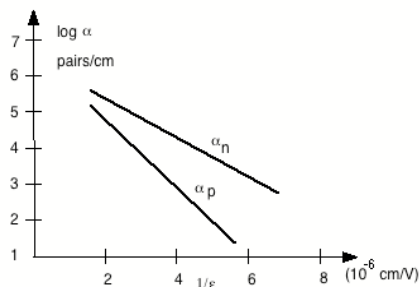
- La corrente di substrato puo' favorire il latch-up
- Il rumore del dispositivo aumenta
- L'impedenza di uscita diminuisce
- Portatori possono essere intrappolati nell' ossido e cio' causa una variazione della tensione di soglia V_{TH} (effetto di elettroni caldi)

Circuito equivalente per piccolo segnale

Conduttanza d'uscita del drain (g_{ds})

Correnti di valanga

- Le correnti di valanga sono peggiori nell' NMOS



Un'espressione piu' accurata della conduttanza di uscita e':

$$g_{ds} = \lambda I_D \quad (\text{I ordine})$$

$$-g_m \frac{\partial V_{TH}}{\partial V_{DS}} \quad (\text{canale corto})$$

$$+ \frac{I_D}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial V_{DS}} \quad (\text{velocita' di saturazione})$$

$$+ \frac{\partial I_S}{\partial V_{DS}} \quad (\text{valanga})$$

Equazioni del transistor MOS

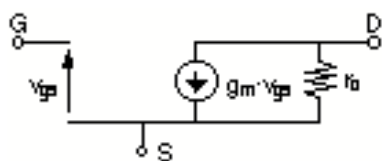
Sommario

Regione lineare	$V_{GS} > V_{TH}$ $V_{DS} < V_{GS} - V_{TH}$
	$I_D = \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right) \left[(V_{GS} - V_{TH}) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$
	$I_D = 2 \cdot k \cdot \left[(V_{GS} - V_{TH}) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$
	$g_m = \mu \cdot C_{ox} \cdot \left(\frac{W}{L} \right) \cdot V_{DS} = 2 \cdot k \cdot V_{DS}$
Regione di saturazione	$V_{GS} > V_{TH}$ $V_{DS} > V_{GS} - V_{TH}$
	$I_D = \frac{1}{2} \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right) (V_{GS} - V_{TH})^2 (1 + \lambda V_{DS})$
	$I_D = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 (1 + \lambda V_{DS})$
	$g_m = \mu \cdot C_{ox} \left(\frac{W}{L} \right) (V_{GS} - V_{TH})$ $g_m = 2 \cdot k \cdot (V_{GS} - V_{TH}) = 2 \cdot \sqrt{k \cdot I_D}$
	$g_m = 2 \cdot \frac{I_D}{V_{GS} - V_{TH}}$
	$g_{ds} = \frac{1}{r_o} = \lambda \cdot I_D$

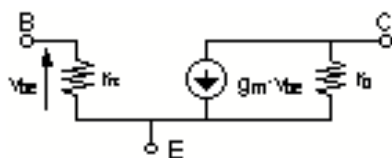
$$k = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot C_{ox} \cdot \left(\frac{W}{L} \right)$$

Stadi di guadagno con MOS

- Il modello a piccolo segnale del MOS (NMOS o PMOS) e' il seguente:



- Si puo' osservare che e' identico a quello del transistor bipolare nel caso di $r_{in} = \infty$ (cioe' con $\beta = \infty$)



Assumendo che:

$$E \Leftrightarrow S$$

$$B \Leftrightarrow G$$

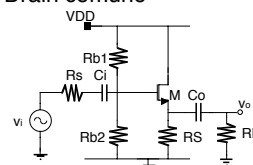
$$C \Leftrightarrow D$$

- L'espressione simbolica del guadagno di uno stadio a MOS si puo' quindi ricavare dall'espressione del corrispondente stadio a bipolare gia' ricavato.

Stadi di guadagno con MOS

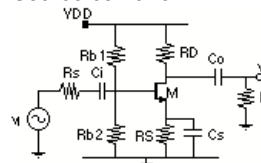
(ignorando l'effetto di R_s - resistenza di sorgente)

- Drain comune



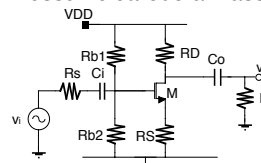
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot (R_s // R_L)}{1 + g_m \cdot (R_s // R_L)}$$

- Source comune



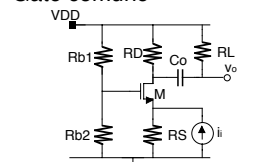
$$\frac{V_o}{V_i} = -g_m \cdot (R_D // R_L)$$

- Nessun elettrodo a massa



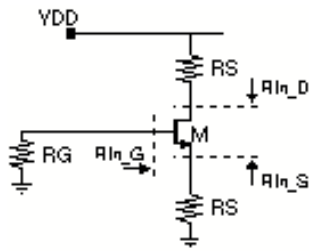
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot (R_D // R_L)}{1 + g_m \cdot R_S}$$

- Gate comune



$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S} \cdot (R_D // R_L)$$

Impedenze di ingresso di un transistor MOS

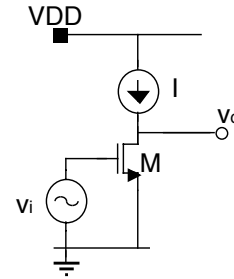


$$R_{in_G} = \infty$$

$$R_{in_D} = r_o + R_S(1 + g_m \cdot r_o)$$

$$\left. \begin{aligned} V_D &= i_{test} \cdot R_D \\ i_{test} &= -g_m(0 - V_{test}) + \frac{V_{test} - V_D}{r_o} \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_{in_S} = \frac{R_D + r_o}{1 + g_m \cdot r_o}$$

Guadagno massimo di un transistor MOS

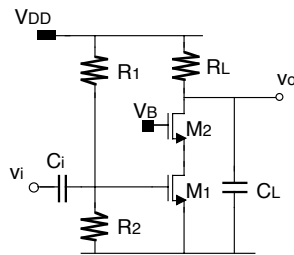


$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m \cdot r_o = -2 \cdot \sqrt{k \cdot I_D} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot I_D} = -\frac{2 \cdot \sqrt{k}}{\lambda} \cdot \sqrt{I_D}$$

- Il guadagno aumenta per correnti piccole

Esercizio (I)

$V_{DD} = 10 \text{ V}$
 $R_1 = 8.5 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$
 $V_{TH} = 1 \text{ V}$
 $k = 5 \text{ mA/V}^2$
 $R_L = 4 \text{ k}\Omega$
 $C_L = 10 \text{ nF}$
 $C_i \rightarrow \infty$
 $V_B = 3 \text{ V}$



Si calcoli il punto di lavoro ed il guadagno $v_o/v_i(s)$ e se ne traccino i diagrammi di Bode

Si valuti il massimo segnale in ingresso prima che M2 entri in zona lineare

Per la polarizzazione il gate di M1 si porta comunque a:

$$V_{GM1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_{DD} = 1.5 \text{ V} = V_{GSM1}$$

Essendo $V_{GSM1} > V_{TH}$, il transistor M1 e' acceso.

Per $V_B = 3 \text{ V}$ anche $V_{GSM2} > V_{TH}$ e quindi M2 e' acceso.

Ora si suppone M1 in saturazione. Quindi la sua corrente e':

$$I_{M1} = k \cdot (V_{GSM1} - V_{TH})^2 = 5 \text{ mA/V}^2 \cdot (0.5 \text{ V})^2 = 1.25 \text{ mA}$$

La stessa corrente scorre su M2.

Esercizio (II)

Si fa ora l'ipotesi di M2 in saturazione. Essendo i due transistor identici (trascurando l'effetto body) ed avendo la stessa corrente, i due transistor lavorano con la stessa VGS:

$$V_{GSM1} = V_{GSM2} = 1.5 \text{ V}$$

Ne segue che:

$$V_{DSM1} = V_B - V_{GSM2} = 1.5 \text{ V}$$

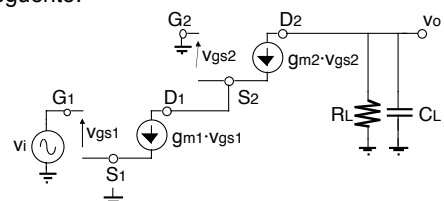
Essendo $V_{DSM1} > V_{GSM1} - V_{TH}$, si verifica quindi che l'ipotesi di M1 in saturazione e' corretta.

La corrente di M2 scorre tutta su RL. Il drain di M2 si porta quindi a:

$$V_{DM2} = V_{DD} - I_{M2} \cdot R_L = 5 \text{ V}$$

Si verifica quindi che anche l'ipotesi di M2 in zona di saturazione e' corretta.

Il circuito per il calcolo della risposta per piccolo segnale e' il seguente:



Si puo' notare come tutta la corrente del generatore comandato $g_{m1} \cdot v_{gs1}$ passi tutta attraverso il generatore comandato $g_{m2} \cdot v_{gs2}$ per poi raggiungere il carico ($R_L // C_L$). Il guadagno e' quindi dato da:

$$H(s) = \frac{v_o}{v_i} = -g_{m1} \cdot (R_L // C_L) = -\frac{g_{m1} \cdot R_L}{1 + s \cdot C_L \cdot R_L}$$

Esercizio (III)

La funzione di trasferimento si può scrivere come:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -A_o \cdot \frac{1}{1 + s/\omega_p}$$

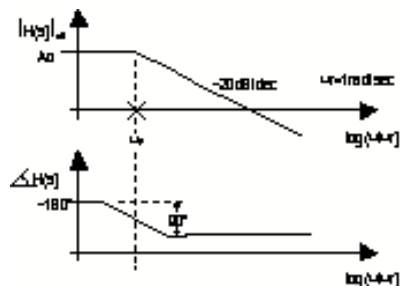
con:

$$\omega_p = \frac{1}{R_L \cdot C_L} = \frac{1}{4k\Omega \cdot 10nF} = 25 \text{ krad/sec}$$

$$g_{m1} = 2 \cdot \frac{I_{M1}}{V_{GS1} - V_{TH}} = 2 \cdot \frac{1.25mA}{0.5V} = 5mA/V$$

$$A_o = g_{m1} \cdot R_L = 5mA/V \cdot 4k\Omega = 20 \text{ (=26dB)}$$

Il diagramma di Bode è il seguente



Si noti che per $f \rightarrow \infty$ la fase tende a -180° per la presenza del segno $-$ nell'espressione della funzione di trasferimento.

Esercizio (IV)

Per valutare il segnale massimo perché M_2 entri in zona lineare è necessario scrivere una condizione di zona lineare per M_2 che può essere che il drain, scendendo, raggiunge il valore:

$$V_{DSlin} = V_{GS} - V_{TH}$$

ovvero

$$V_{Dlin} = V_G - V_{TH}$$

Il gate di M_2 è fisso, mentre il suo drain è alla tensione:

$$V_{DM2} = V_{DM2o} + A_o \cdot V_i$$

con $A_o = -g_{m1} \cdot R_L$, V_{DM2o} è la tensione di polarizzazione del drain di M_2 . Dalla precedente espressione si può scrivere:

$$V_{DM2o} + A_o \cdot V_{imax} = V_{GM2} - V_{TH}$$

Si può quindi ricavare il valore massimo in ingresso che risulta essere dato da:

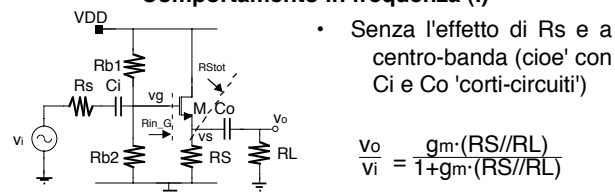
$$V_{imax} = \frac{V_{Do} - V_{GM2} - V_{TH}}{A_o} = \frac{5V - 3V - 1.5V}{20} = \frac{0.5V}{20} = 25mV$$

Confronto MOS-bipolare

	Bipolare		MOS
g_m	$\frac{I_C}{V_T}$	$>$	$2 \cdot \frac{I_D}{V_{GS} - V_{TH}}$
V_A	100 V	$>$	20 ÷ 50V
r_o	$\frac{V_A}{I_C}$	$>$	$\frac{V_A}{I_D}$
Guadagno massimo	$-\frac{V_A}{V_T}$	$>$	$-2 \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{I_D} \cdot V_A$
Offset	$< 1mV$	$<$	10 ÷ 20 mV
f_T	f_{T_BIP}	$>$	f_{T_MOS}

Drain comune

Comportamento in frequenza (I)



- Senza l'effetto di R_s e a centro-banda (cioè con C_i e C_o 'corti-circuiti')

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m \cdot (R_S // R_L)}{1 + g_m \cdot (R_S // R_L)}$$

Per ricavare la funzione di trasferimento si può scomporre il problema in tre parti scrivendo:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_s} \cdot \frac{V_s}{V_g} \cdot \frac{V_g}{V_i}$$

- Calcolo di $\frac{V_g}{V_i}$
 - Nel circuito di piccolo segnale
 - le due resistenze R_{b1} e R_{b2} sono a massa
 - $R_{in_G} = \infty$
- Allora si può scrivere:

$$\frac{V_g}{V_i} = \frac{(R_{b1} // R_{b2})}{R_s + \frac{1}{s \cdot C_i} + (R_{b1} // R_{b2})} =$$

$$= \frac{s \cdot C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})}{1 + s \cdot C_i \cdot (R_s + (R_{b1} // R_{b2}))} =$$

$$\frac{V_g}{V_i} = \frac{s \cdot \tau_{z_gi}}{1 + s \cdot \tau_{p_gi}}$$

Con: $\tau_{z_gi} = C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})$;
 $\tau_{p_gi} = C_i \cdot (R_s + (R_{b1} // R_{b2}))$

Drain comune

Comportamento in frequenza (II)

- Calcolo di $\frac{V_s}{V_g}$

Si può riutilizzare l'equazione del drain comune semplificata, sostituendo a R_S , R_{Stot} data da:

$$R_{Stot} = R_S // \left(\frac{1}{s \cdot C_O} + R_L \right) = \frac{R_S \cdot \left(\frac{1}{s \cdot C_O} + R_L \right)}{R_S + \left(\frac{1}{s \cdot C_O} + R_L \right)} = R_S \cdot \frac{1 + s \cdot C_O \cdot R_L}{1 + s \cdot C_O \cdot (R_L + R_S)}$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{V_s}{V_g} &= \frac{g_m \cdot R_{Stot}}{1 + g_m \cdot R_{Stot}} = \frac{g_m \cdot R_S \cdot (1 + s \cdot C_O \cdot R_L)}{1 + g_m \cdot R_S + s \cdot C_O \cdot (R_L + R_S + g_m \cdot R_S \cdot R_L)} = \\ &= \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S} \cdot \frac{1 + s \cdot C_O \cdot R_L}{1 + s \cdot C_O \cdot \frac{R_L + R_S + g_m \cdot R_S \cdot R_L}{g_m \cdot R_S}} = \end{aligned}$$

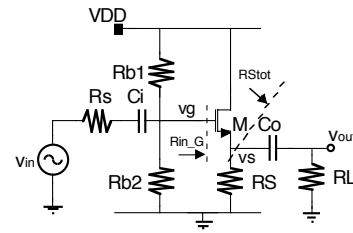
$$\frac{V_s}{V_g} = A_{sg} \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_{z_sg}}{1 + s \cdot \tau_{p_sg}}$$

Con: $A_{sg} = \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S}$

$$\tau_{z_sg} = C_O \cdot R_L; \quad \tau_{p_sg} = C_O \cdot \frac{R_L + R_S + g_m \cdot R_S \cdot R_L}{g_m \cdot R_S}$$

Drain comune

Comportamento in frequenza (III)



- Calcolo di $\frac{V_o}{V_s}$

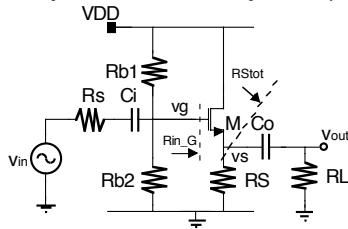
$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{R_L}{R_L + \frac{1}{s \cdot C_O}} = \frac{s \cdot R_L \cdot C_O}{1 + s \cdot R_L \cdot C_O} =$$

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{s \cdot \tau_{os}}{1 + s \cdot \tau_{os}}$$

Con: $\tau_{os} = C_O \cdot R_L$

Drain comune

Comportamento in frequenza (IV)



- Riassumendo:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_s} \cdot \frac{V_s}{V_g} \cdot \frac{V_g}{V_i} = \frac{s \cdot \tau_{os}}{1 + s \cdot \tau_{os}} \cdot A_{sg} \cdot \frac{1 + s \cdot \tau_{z_sg}}{1 + s \cdot \tau_{p_sg}} \cdot \frac{s \cdot \tau_{z_gi}}{1 + s \cdot \tau_{p_gi}}$$

Con: $A_{sg} = \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S}$

$$\tau_{z_gi} = C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2});$$

$$\tau_{p_gi} = C_i \cdot (R_S + (R_{b1} // R_{b2}))$$

$$\tau_{z_sg} = C_O \cdot R_L$$

$$\tau_{p_sg} = C_O \cdot \frac{R_L + R_S + g_m \cdot R_S \cdot R_L}{g_m \cdot R_S}$$

$$\tau_{os} = C_O \cdot R_L$$

Essendo: $\tau_{os} = \tau_{z_sg}$, l'espressione si riduce a:

$$\frac{V_o}{V_i} = A_{sg} \cdot \frac{s \cdot \tau_{os}}{1 + s \cdot \tau_{p_sg}} \cdot \frac{s \cdot \tau_{z_gi}}{1 + s \cdot \tau_{p_gi}}$$

Drain comune

Comportamento in frequenza (V)

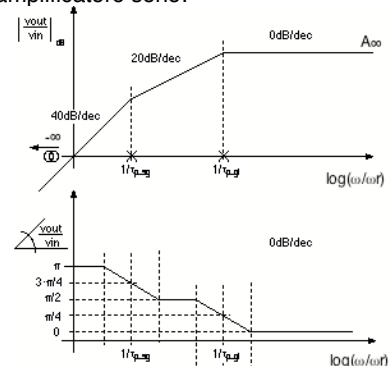
- Diagrammi di Bode

$$\frac{V_o}{V_i} = A_{sg} \cdot \frac{s \cdot \tau_{os}}{1 + s \cdot \tau_{p_sg}} \cdot \frac{s \cdot \tau_{z_gi}}{1 + s \cdot \tau_{p_gi}}$$

Supponendo che:

$$\tau_{p_sg} > \tau_{p_gi}$$

- I diagrammi di Bode della risposta in frequenza dell'amplificatore sono:



Il guadagno A_∞ si ottiene per $s \rightarrow \infty$ ed è dato da:

$$\begin{aligned} A_\infty &= \frac{V_o}{V_i} = A_{sg} \cdot \frac{\tau_{os}}{\tau_{p_sg}} \cdot \frac{\tau_{z_gi}}{\tau_{p_gi}} = \\ &= \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S} \cdot \frac{g_m \cdot R_S \cdot R_L}{R_L + R_S + g_m \cdot R_S \cdot R_L} \cdot \frac{R_{b1} // R_{b2}}{R_S + (R_{b1} // R_{b2})} \approx \\ A_\infty &\approx \frac{g_m \cdot R_S}{1 + g_m \cdot R_S} \cdot \frac{R_{b1} // R_{b2}}{R_S + (R_{b1} // R_{b2})} \end{aligned}$$

Progetto di un Source comune (I)

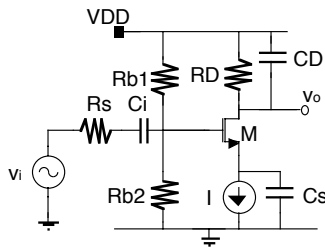
E' data una sorgente di segnale con $R_s=100\Omega$, e con ampiezza di 50mV.

Si progetti uno stadio di guadagno a Source comune (polarizzazione inclusa) che riesca a realizzare un'amplificazione di -30 su di un carico resistivo di 10k Ω .

Dimensionare i condensatori di ingresso (by-pass) e di carico in modo che l'amplificazione abbia una banda [20Hz - 20kHz].

Si valuti la potenza dissipata.

Si ha a disposizione un transistor NMOS con $V_{TH}=1V$ e $k=10mA/V^2$.



L' espressione del guadagno di un source comune e':

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_g}{V_i} \cdot \frac{V_o}{V_g} = \frac{R_{b1} // R_{b2}}{R_s + R_{b1} // R_{b2}} \cdot (-g_m \cdot R_D)$$

Progetto di un Source comune (II)

Per minimizzare la potenza dissipata sul ramo di polarizzazione si puo' fissare:

$$R_{b1} // R_{b2} = 2M\Omega$$

Cio' comporta:

$$\frac{R_{b1} // R_{b2}}{R_s + R_{b1} // R_{b2}} = .9999500025$$

Questo guadagno verra' approssimato con 1 e di seguito trascurato. Il guadagno si puo' allora scrivere come:

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_g}{V_i} \cdot \frac{V_o}{V_g} = -2 \cdot \sqrt{k \cdot I_D} \cdot R_D = -30$$

Da cio' si ricava il valore della corrente di polarizzazione:

$$I_D = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{A_v}{2 \cdot R_D} \right)^2 = 0.225mA = I$$

Da cio' si ricava la V_{GS} del transistor:

$$V_{GS} = V_{TH} + \sqrt{\frac{I}{k}} = 1.15V$$

e la caduta di tensione su R_D :

$$V_{RD} = I \cdot R_D = 2.25V$$

L'ampiezza del segnale di uscita e' di:

$$A_{out} = 50mV \cdot 30 \cdot 2 = 3V$$

Si puo' allora fissare:

$$V_{DD} = 6V \quad V_G = 2V$$

Per fissare $V_G = 2V$ deve essere:

$$R_{b1} = 2 \cdot R_{b2}$$

$$\frac{R_{b1} \cdot R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}} = \frac{2 \cdot R_{b2}^2}{3 \cdot R_{b2}} = \frac{2}{3} \cdot R_{b2} = 2M\Omega$$

Ne segue che:

$$R_{b2} = 3M\Omega$$

e

$$R_{b1} = 6M\Omega$$

Progetto di un Source comune (III)

Si puo' infine progettare il valore dei condensatori di ingresso e di uscita.

Per il condensatore di ingresso C_i , la funzione di trasferimento $\frac{V_{gate}}{V_{in}}$ e':

$$\begin{aligned} \frac{V_{gate}}{V_i} &= \frac{R_{b1} // R_{b2}}{R_s + \frac{1}{s \cdot C_i} + R_{b1} // R_{b2}} = \\ &= \frac{s \cdot C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})}{1 + s \cdot C_i \cdot (R_s + R_{b1} // R_{b2})} \approx \frac{s \cdot C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})}{1 + s \cdot C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})} \end{aligned}$$

E' una f.d.t. di tipo passa-alto. Dovra' quindi fissare la frequenza inferiore di taglio (20Hz) a cui devo uguagliare il polo in ingresso, cioe':

$$f_{pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_i \cdot (R_{b1} // R_{b2})} = 20Hz$$

Si ricava quindi:

$$C_i = 4nF$$

Per il condensatore di uscita, il carico $R_D // C_D$ realizza una f.d.t. di tipo passa-basso e fissa allora la frequenza superiore di taglio che sara' data da:

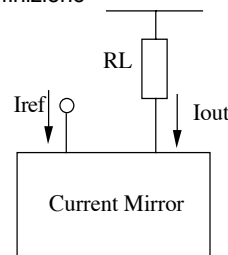
$$f_{po} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C_D \cdot R_D} = 20kHz$$

Si ricava quindi:

$$C_D = 0.8nF$$

Lo specchio di corrente

Definizione



$$I_{out} = k \cdot I_{Ref}$$

k e' il guadagno di corrente

Non-idealita'

- Errore nel guadagno di corrente

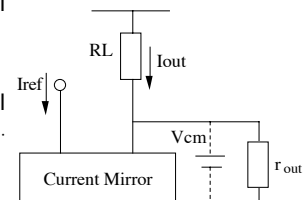
- Impedenza di uscita (r_{out})

=> riduce la corrente sul R_L : $I_{out} = k \cdot I_{Ref} \cdot \frac{R_L}{R_L + r_{out}}$

- Tensione di saturazione (V_{cm})

=> per $V_o < V_{cm}$ lo specchio di corrente non opera correttamente

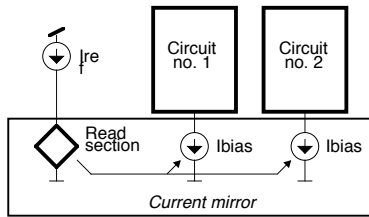
- Comportamento in frequenza



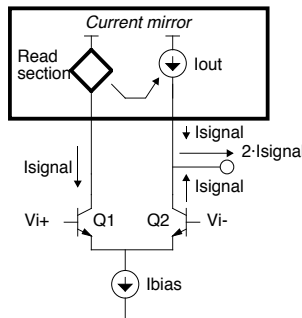
Lo specchio di corrente

Applicazioni

- Polarizzazione di circuiti



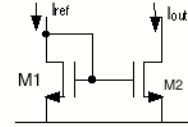
- Nel cammino di segnale



- Trasformazione differenziale-single-ended

Specchio di corrente semplice

Guadagno di corrente



- M1 opera in saturazione

$$I_{ref} = I_1 = \frac{k'}{2} \left(\frac{W}{L} \right)_1 (V_{GS1} - V_{TH})^2 (1 + \lambda V_{DS1})$$

$$V_{DS1} = V_{GS1} = V_{GS2}$$

- Se M2 opera in saturazione

$$I_{out} = I_2 = \frac{k'}{2} \left(\frac{W}{L} \right)_2 (V_{GS2} - V_{TH})^2 (1 + \lambda V_{DS2})$$

$$I_{out} = I_{ref} \frac{\left(\frac{W}{L} \right)_2}{\left(\frac{W}{L} \right)_1} \frac{(1 + \lambda V_{DS2})}{(1 + \lambda V_{DS1})}$$

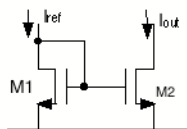
- Uso di ampi $(V_{GS} - V_{TH})$ per migliorare la precisione del guadagno di corrente (riducendo l'importanza delle variazioni della tensione di soglia)
- Variazioni tipiche della tensione di soglia sono nell'ordine di 5mV. Per transistor distanti puo' essere di 40mV.
- La corrente di uscita si puo' allora scrivere:

$$I'_{out} = I_{out} \left(1 + 2 \frac{\Delta V_{TH}}{V_{GS} - V_{TH}} \right)$$

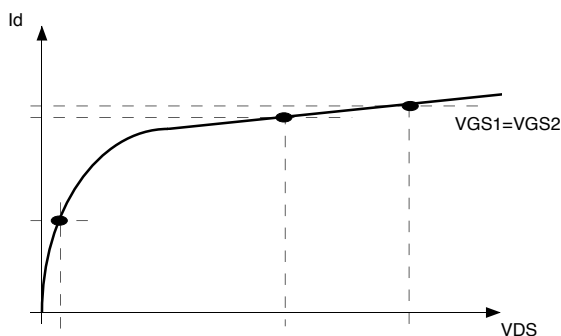
Specchio di corrente semplice

Variazioni di Vds

$$\frac{I_{out}}{I_{ref}} = \frac{\left(\frac{W}{L} \right)_2}{\left(\frac{W}{L} \right)_1} \cdot \frac{1 + \lambda V_{DS2}}{1 + \lambda V_{DS1}}$$

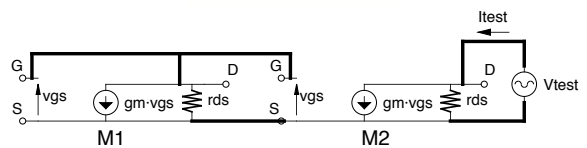
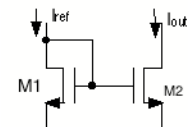


- Il transistor M1 fissa la V_{GS} su cui lavora il transistor M2



Specchio di corrente semplice

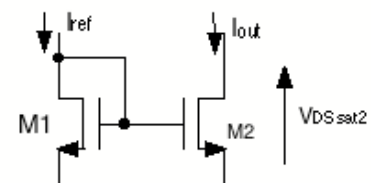
Impedenza di uscita



$$r_{out} = r_{ds2} = \frac{1}{\lambda I_2}$$

- Uso di dispositivi con L lungo per aumentare r_{out}

Swing di uscita

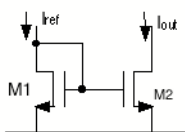


- Lo swing verso il basso e' limitato a:

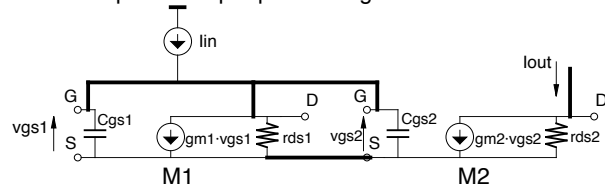
$$V_{out,min} = V_{DSsat2}$$

Specchio di corrente semplice

Risposta in frequenza



Circuito equivalente per piccolo segnale



$$\frac{i_o}{i_i} = \frac{g_{m2}/g_{m1}}{1 + s \cdot (C_{gs1} + C_{gs2})/g_{m1}}$$

$$k = g_{m2}/g_{m1} = C_{gs2}/C_{gs1}$$

$$\frac{i_o}{i_i} = \frac{k}{1 + s \cdot (1+k) \cdot C_{gs1}/g_{m1}}$$

$$f_T = g_{m1}/C_{gs1}$$

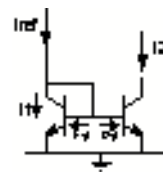
Il polo si trova alla frequenza f_p :

$$f_p = (g_{m1}/C_{gs1})/(1+k) = f_T/(1+k)$$

V - 73

October 27, 2007

Specchio di corrente bipolare



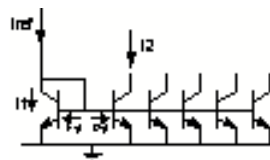
- Effetto della corrente di base

$$I_{ref} = I_1 + I_1/\beta + I_2/\beta$$

$$I_1 = I_2$$

$$I_2 = \frac{I_{ref}}{1 + \frac{2}{\beta}}$$

- Se si considerano piu' specchi



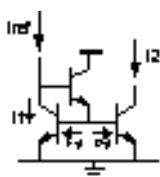
$$I_2 = \frac{I_{ref}}{1 + \frac{n+1}{\beta}}$$

V - 74

October 27, 2007

Specchio di corrente bipolare

- Recupero di corrente per ridurre l'effetto della corrente di base



$$I_2 = \frac{I_{ref}}{1 + \frac{2}{\beta^2}}$$

- Per n specchi collegati

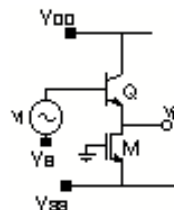
$$I_2 = \frac{I_{ref}}{1 + \frac{n+1}{\beta^2}}$$

- Il circuito di sensing della corrente I_{ref} ha bisogno di $2 \cdot V_{BE}$ (cioè 1.4V) invece di V_{BE} (0.7V) del precedente specchio di corrente
- Il transistor bipolare che recupera la corrente di base può essere sostituito con un transistor MOS, in modo da avere $\beta^2 = \infty$

V - 75

October 27, 2007

Esercizio (I)



$$V_{BE} = 0.7V$$

$$\beta = \infty$$

$$V_T = 25mV$$

$$k = 0.1mA/v^2$$

$$V_{TH} = 1V$$

$$V_{DD} = -V_{SS} = 5V$$

a - punto di lavoro per $V_B = 0$ e $V_A = \infty$

b - $\frac{V_o}{V_i}(V_A) = ?$

c - $V_{Ax} = ?$ tale che $\frac{V_o}{V_i}(V_{Ax}) = (1 - 0.01) \cdot \frac{V_o}{V_i}(V_A = \infty)$

d - $V_{Bmin} = ?$ tale che i transistor operino come al punto (b)

- a

Se $V_B = 0$, allora $V_E = V_D = -0.7$.

Essendo $V_G = 0$, si ha che $V_{GS} = 5V$. Allora

$$V_{DS} = 4.3V > V_{GS} - V_{TH} = 4V$$

Quindi M opera in saturazione. La corrente risulta:

$$I = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = 1.6mA$$

- b

Lo schema corrisponde ad un collettore comune ove la resistenza sull'emettitore corrisponde all'impedenza vista dal drain del transistor MOS. Pertanto il guadagno risulta dato da:

$$\frac{V_o}{V_i}(V_A) = \frac{g_{mBIP} \cdot r_{oMOS}}{1 + g_{mBIP} \cdot r_{oMOS}}$$

V - 76

October 27, 2007

Esercizio (II)

Ove

$$g_{mBIP} = \frac{I}{V_t} \quad r_{oMOS} = \frac{V_A}{I}$$

Ne deriva che:

$$\frac{V_o}{V_i}(V_A) = \frac{g_{mBIP} \cdot r_{oMOS}}{1 + g_{mBIP} \cdot r_{oMOS}} = \frac{V_A}{V_t + V_A}$$

• c

Si ha che $\frac{V_o}{V_i}(V_A = \infty) = 1$.

Se si vuole che

$$\frac{V_A}{V_t + V_A} = 0.99$$

Deve essere che:

$$V_A \cdot (1 - 0.99) = 0.99 \cdot V_t$$

Quindi deve essere:

$$V_A = \frac{0.99}{0.01} \cdot V_t = 2.45V$$

• d

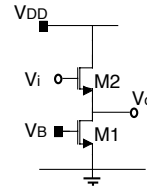
Essendo $V_G = 0$, si ha che $V_{GS} = 5V$. Allora

$$V_{DSmin} = V_{GS} - V_{TH} = 4V$$

Quindi

$$V_{Bmin} = V_D = V_{GS} - V_{TH} + V_S = -1V$$

Esercizio (I)



$$V_{DD} = 5V$$

$$V_B = 1.5V$$

$$V_{TH} = 1V$$

$$k_{M1} = k_{M2}$$

$$V_o(V_i) = ?$$

La tensione V_B e' fissa e corrisponde a V_{GS1}

$$V_B = V_{GS1} = 1.5V > V_{TH} = 1V$$

Da cui si ricava che cioe' M1 e' sempre acceso. Bisogna ora individuare se opera in saturazione o in regione lineare, a seconda di come si porta la tensione del suo drain.

• Per $0V < V_i < 1V$

Il transistor M2 e' spento. Non c'e' alcuna corrente che scorre e quindi M1 (che e' acceso) opera in regione lineare. Ai suoi capi, con corrente nulla, c'e' tensione nulla e quindi:

$$V_o = 0V$$

• Per $1V < V_i < V_x$

Alzando V_i oltre V_{TH} il transistor M2 si accende e inizia a scorrere corrente che e' la stessa per M1 e M2:

$$I_{M1} = I_{M2}$$

Avendo un'ampia V_{DS} e' subito in saturazione. Invece M1 con una V_{DS} bassa rimane in triodo. Questo e' vero finche' V_i non raggiunge una tensione V_x da determinare

Esercizio (II)

$$V_{DSsat1} = V_{GS1} - V_{TH} = 0.5$$

M1 esce dalla regione di triodo quando $V_{DS1} = V_{DSsat1}$

Per l'uguaglianza delle correnti si potra' scrivere (in quell'istante M1 e M2 sono entrambi in saturazione):

$$V_{ov1} = V_{ov2}$$

$$V_i = V_{TH} + V_{ov2} + V_{ov1} = V_{TH} + 2 \cdot V_{ov}$$

Essendo $V_{ov} = 0.5V$ si ottiene che per $V_i = 2V$ M1 esce dalla zona di saturazione ed entra in triodo. Quindi:

$$V_x = 2V$$

Per determinare V_o in questo intervallo di valori di V_i si scrive:

$$V_o = V_{DS1} = V_i - V_{GS2}$$

$$I_1 = 2 \cdot k_1 \cdot \left((V_{GS1} - V_{TH}) \cdot V_{DS1} - \frac{V_{DS1}^2}{2} \right)$$

$$I_2 = k_2 \cdot (V_{GS2} - V_{TH})^2$$

$$I_1 = I_2$$

$$V_{GS1} = V_B; V_{DS1} = V_o$$

Si ricava:

$$V_o = 0.5 \cdot V_i - 0.25 \pm 0.25 \sqrt{-7 + 12 \cdot V_i - 4 \cdot V_i^2}$$

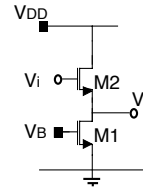
Per determinare se vale il '+' o il '-' si valuta che per $V_i = 1.5V$ si ha $V_o = [0.146V, 0.853V]$.

La soluzione $V_o = 0.853$ non va bene perche' $V_{GS2} < V_{TH}$.

Quindi vale l'espressione con il '-':

$$V_o = 0.5 \cdot V_i - 0.25 - 0.25 \sqrt{-7 + 12 \cdot V_i - 4 \cdot V_i^2}$$

Esercizio (III)



• Per $2V < V_i < V_y$

I due transistor sono entrambi in saturazione. Essendo uguali ($k_1 = k_2$) ed avendo la stessa corrente, hanno anche uguale V_{GS} .

$$V_{GS2} = V_{GS1} = V_B$$

La tensione in uscita e':

$$V_o = V_i - V_{GS2} = V_i - V_B = V_i - 1.5V$$

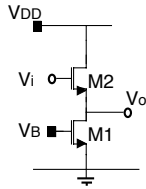
Cio' vale finche' M2 entra in zona lineare, il che accade per:

$$V_{GD2} > V_{TH} = 1V$$

Cioe' per:

$$V_y = V_{GD2} > V_{D2} + V_{TH} = V_{DD} + V_{TH} = 6V$$

Esercizio (IV)



- Per $6V < V_i$

Il transistor M2 entra in zona di lineare. La corrente risulta fissata da M1 che opera in saturazione, ed e' data da:

$$I_{D1} = k_1 \cdot (V_{GS1} - V_{TH})^2$$

Questa corrente scorre su M2 che opera in zona lineare. La sua corrente si scrive quindi come:

$$I_{D2} = 2 \cdot k_2 \cdot [(V_{GS2} - V_{TH2})V_{DS2} - \frac{V_{DS2}^2}{2}]$$

Si sostituisce:

$$V_{G2} = V_i; V_{D2} = V_{DD}; V_{S2} = V_o; I_{D2} = I_{D1}$$

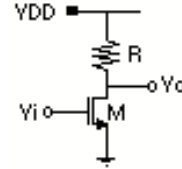
e si ottiene:

$$I_{D1} = 2 \cdot k_2 \cdot [(V_i - V_o - V_{TH2}) \cdot (V_{DD} - V_o) - \frac{(V_{DD} - V_o)^2}{2}]$$

Risolvendo per V_o si ottiene:

$$V_o = V_i - V_{TH2} \pm \frac{\sqrt{k_2 \cdot (I_{D1} + k_2 \cdot V_{DD}^2 - 2 \cdot k_2 \cdot V_{DD} \cdot V_i + k_2 \cdot V_i^2 + 2 \cdot k_2 \cdot V_{DD} \cdot V_{TH2} - 2 \cdot k_2 \cdot V_i \cdot V_{TH2} + k_2 \cdot V_{TH2}^2)}}{k_2}$$

Uso del carico attivo



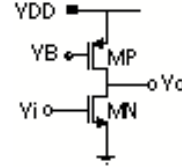
Il guadagno e' dato da:

$$\frac{V_o}{V_i} = -g_m \cdot R = -2 \cdot \frac{I}{V_{GS} - V_{TH}} \cdot R = -2 \cdot \frac{V_R}{V_{GS} - V_{TH}}$$

Per avere guadagno alto devo avere V_R alta e quindi alimentazione alta.

=> Uso del carico attivo

L'impedenza del nodo di uscita si puo' aumentare usando un generatore di corrente, fatto con un semplice transistor, opportunamente polarizzato:



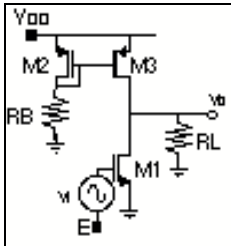
Il guadagno diventa:

$$\frac{V_o}{V_i} = -g_{mMN} \cdot (r_{oMN} // r_{oMP})$$

La tensione V_B puo' essere generata ad esempio con uno specchio di corrente.

Quanto deve essere $V_R = (V_A/2)$ per avere stesso guadagno?

Esercizio (I)



$$\begin{aligned} V_{DD} &= 5V \\ V_{THP} &= -1V \\ V_{THN} &= 1V \\ R_B &= 5k\Omega \\ R_L &= 6k\Omega \\ k_p &= 2mA/V^2 \\ k_n &= 1mA/V^2 \end{aligned}$$

- calcolare il punto di lavoro e guadagno v_o/v_i per $E=0V$
- calcolare il punto di lavoro e guadagno v_o/v_i per $E=1.5V$ (si trascurino le impedenze di uscita dei transistor MOS)

a.

Il ramo M2- R_B opera indipendentemente da E. Pertanto la sua corrente si puo' scrivere, essendo M2 in saturazione, come:

$$\begin{aligned} I_{M2} &= k_p \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 \\ I_{M2} &= I_{RB} = \frac{V_{DD} - V_{GS}}{R_B} \end{aligned}$$

Uguagliando i due termini si ottiene:

$$k_p \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = \frac{V_{DD} - V_{GS}}{R_B}$$

Si trovano due soluzioni:

$$V_{GS2} = [0, 1.8V]$$

L'unica possibile e' $V_{GS}=1.8V$

Quindi

$$I_{RB} = \frac{5V - 1.8V}{5k\Omega} = 0.64mA$$

Esercizio (II)

M2 e M3 costituiscono uno specchio di corrente. Pertanto

$$I_{M3} = 0.64mA$$

Nel primo ramo con $E=0$, M1 e' spento e quindi tutta la corrente passa su R_L . Si ha quindi:

$$v_o = I_{M3} \cdot R_L = 3.84V$$

Per questo valore e' verificato che M3 opera in saturazione.

Essendo M1 spento la sua transconduttanza e' nulla e pertanto si ha:

$$v_o/v_i = 0$$

b.

Per $E=1.5V$, supponendo M1 in saturazione, la I_{M1} e' data da:

$$I_{M1} = k_n \cdot (V_{GS1} - V_{TH})^2 = 0.25mA$$

Pertanto su R_L scorre:

$$I_{RL} = 0.64mA - 0.25mA = 0.39mA$$

La V_o di polarizzazione risulta:

$$V_o = I_{RL} \cdot R_L = 2.34V$$

Il guadagno risulta:

$$\frac{V_o}{V_i} = -g_{mM1} \cdot R_L = -2 \cdot \frac{I_{M1}}{V_{GS1} - V_{TH}} \cdot R_L = -6$$

Rapporto di reiezione per disturbi sull'alimentazione

(Power Supply Rejection Ratio - PSRR)

Se un rumore v_n viene iniettato sull'alimentazione V_{DD} , questo segnale arriva all'uscita con un guadagno pari a (calcolato per $v_i=0$):

$$\frac{v_o}{v_n} = \frac{r_o}{r_o + R} \approx 1$$

con r_o impedenza di uscita del transistor MOS.

- Quindi ogni disturbo sull'alimentazione arriva direttamente in uscita.
- L'uscita v_o e' data da:

$$v_o = -g_m \cdot R \cdot v_i + \frac{r_o}{r_o + R} \cdot v_n = A_{in} \cdot v_i + A_p \cdot v_n$$

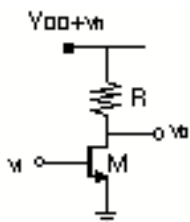
- Si definisce il Rapporto di Reiezione per Disturbi sull'Alimentazione (PSRR):

$$PSRR^+ = \frac{A_p}{A_{in}}$$

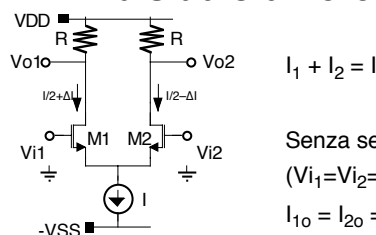
- Il PSRR deve essere il piu' piccolo possibile.
- Per il source comune si ha:

$$PSRR^+ = \frac{A_p}{A_{in}} = -\frac{1}{g_m \cdot R}$$

Quanto vale PSRR- ? (= 1)



La stadio differenziale



Senza segnale
($V_{i1}=V_{i2}=0$)

$$I_{10} = I_{20} = I/2$$

$$V_{i1} - V_{GS1} + V_{GS2} - V_{i2} = 0$$

$$I_1 = k \cdot (V_{GS1} - V_{TH})^2 \Rightarrow V_{GS1} = V_{TH} + \sqrt{\frac{I_1}{k}}$$

$$I_2 = k \cdot (V_{GS2} - V_{TH})^2 \Rightarrow V_{GS2} = V_{TH} + \sqrt{\frac{I_2}{k}}$$

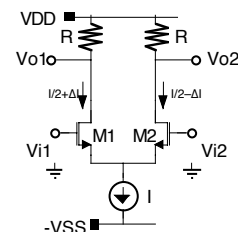
$$V_{i1} - V_{i2} = \Delta V_i$$

$$\Delta V_i - V_{TH} - \sqrt{\frac{I_1}{k}} + V_{TH} + \sqrt{\frac{I_2}{k}} = 0$$

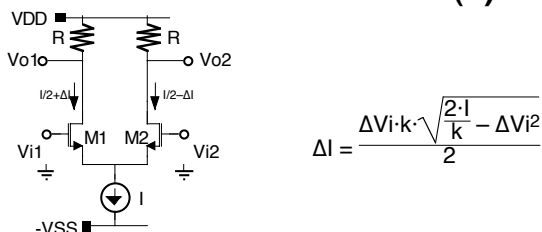
$$I_2 = I/2 + \Delta I$$

$$I_1 = I/2 - \Delta I$$

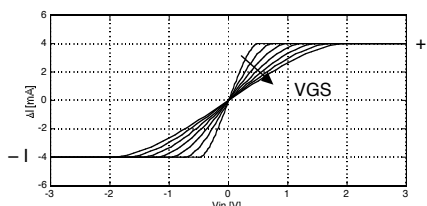
$$\Delta I = \frac{\Delta V_i \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{k}} - \Delta V_i^2}{2}$$



La stadio differenziale (II)



$$\Delta I = \frac{\Delta V_i \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{k}} - \Delta V_i^2}{2}$$



- L'espressione e' valida se i due transistor sono in saturazione, cioe' per:

$$\Delta V_i \leq \sqrt{\frac{I}{k}} = V_{GS} - V_{TH}$$

- Guadagno in tensione

$$\frac{v_{o1}}{\Delta V_i} = -\frac{k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{k}} - \Delta V_i^2}{2} \cdot R$$

$$\frac{v_{o2}}{\Delta V_i} = \frac{k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{k}} - \Delta V_i^2}{2} \cdot R$$

- Se l'uscita viene osservata in maniera differenziale

$$v_o = v_{o1} - v_{o2} = \left(k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{k}} - \Delta V_i^2 \right) \cdot R$$

La stadio differenziale (III)

Guadagno di piccolo segnale

Fare il circuito di piccolo segnale assumendo due sorgenti di valore (si potrebbe usare la sovrapposizione degli effetti):

$$v_{i1} = -v_{i2} = v_i/2$$

Polarizzazione (si spengono i generatori di segnale)

Essendo i transistor uguali, la corrente I si divide in parti uguali nei due transistor.

Pertanto, i due transistor hanno gli stessi parametri di piccolo segnale

$$g_{m1} = g_{m2} = g_m$$

Per la legge di Kirchhoff delle correnti al nodo di S1 e S2

$$g_{m1} \cdot v_{gs1} = -g_{m2} \cdot v_{gs2}$$

$$g_m \cdot v_{gs1} = -g_m \cdot v_{gs2}$$

$$v_{gs1} = -v_{gs2}$$

Per la legge di Kirchhoff delle tensioni

$$v_{i1} = v_{gs1} - v_{gs2} + v_{i2}$$

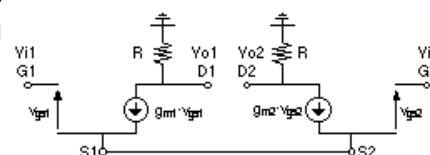
$$v_{i1} - v_{i2} = v_{gs1} - v_{gs2} = 2 \cdot v_{gs1}$$

$$v_{gs1} = \frac{v_{i1} - v_{i2}}{2} = -v_{gs2}$$

$$v_{o1} = -g_m \cdot v_{gs1} \cdot R = -g_m \cdot \frac{v_{i1} - v_{i2}}{2} \cdot R = -g_m \cdot R \cdot \frac{v_i}{2}$$

$$v_{o2} = -g_m \cdot v_{gs2} \cdot R = -g_m \cdot \left(-\frac{v_{i1} - v_{i2}}{2} \right) \cdot R = g_m \cdot R \cdot \frac{v_i}{2}$$

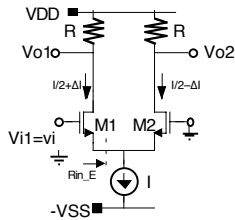
$$v_o = v_{o1} - v_{o2} = g_m \cdot R \cdot v_i$$



La stadio differenziale (III)

Guadagno di piccolo segnale

- Viene calcolato per V_i piccolo
- Metodi diversi di calcolo
 - mettere tutto il segnale su $v_{i1}=v_i$, ($v_{i2}=0$) (cio' comporta un modo comune addizionale da trascurare)



ΔI e' la corrente di segnale che va calcolata con il circuito equivalente di piccolo segnale. Quindi si valuta:

$$R_{in,E} = \frac{1}{g_{m2}}$$

E si ricava

$$\Delta I = \frac{g_{m1}}{1 + g_{m1} \cdot R_{in,E}} \cdot v_i = \frac{g_{m1}}{1 + \frac{g_{m1}}{g_{m2}}} \cdot v_i$$

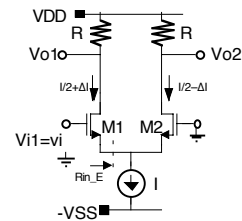
Essendo $g_{m1}=g_{m2}=g_m$, si ottiene:

$$\Delta I = \frac{g_m}{2} \cdot v_i$$

E' la meta' di quella del singolo transistor a pari corrente

La stadio differenziale (IV)

Guadagno di piccolo segnale



Con:

$$\Delta I = \frac{g_m}{2} \cdot v_i$$

Il guadagno di piccolo segnale sulla singola uscita si scrive:

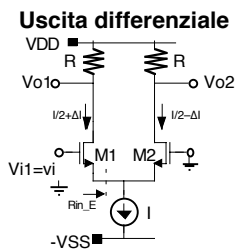
$$\frac{v_{o1}}{v_i} = -\frac{g_m}{2} \cdot R$$

$$\frac{v_{o2}}{v_i} = \frac{g_m}{2} \cdot R$$

- Anche il guadagno e' la meta' di quella del singolo transistor a pari corrente
- Due soluzioni
 - leggere l'uscita differenzialmente;
 - realizzare una conversione differenziale => singola-uscita

La stadio differenziale (V)

Guadagno di piccolo segnale



La tensione di uscita risulta data da:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{v_i} = -g_m \cdot R$$

Come quella del singolo transistor

- Un possibile problema e' che tipicamente il carico che si vuole applicare e' riferito a massa, mentre in questo caso, per avvantaggiarsi della lettura differenziale, dovrebbe essere attaccato tra i due morsetti di uscita
- PSRR: applicando sull'alimentazione un generatore di segnale v_p , si puo' scrivere:

$$\frac{v_{o1}}{v_p} = \frac{r_{oQ1}}{r_{oQ1} + R}$$

$$\frac{v_{o2}}{v_p} = \frac{r_{oQ2}}{r_{oQ2} + R}$$

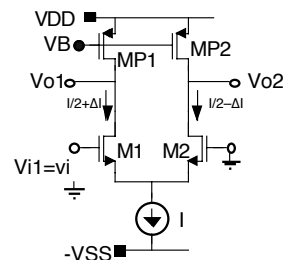
- Il guadagno sull'uscita differenziale rispetto a v_p (essendo $r_{oQ2}=r_{oQ1}$, $Q1$ e $Q2$ operano alla stessa corrente) e':

$$\frac{v_o}{v_p} = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{v_p} = 0$$

La stadio differenziale (VI)

Guadagno di piccolo segnale

Uscita differenziale con carico attivo



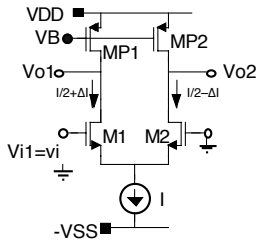
- Il guadagno si puo' aumentare inserendo il carico attivo

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{v_i} = -g_{mMN} \cdot (r_{oMN} // r_{oMP})$$

La stadio differenziale (VII)

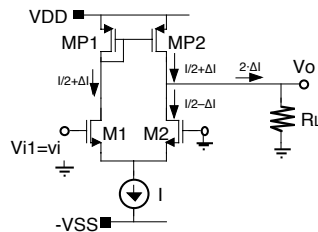
Guadagno di piccolo segnale

Uscita single-ended



- Volendo prendere l'uscita riferita a massa, (ad esempio su Vo2), la corrente di segnale su MP1 andrebbe persa.
- Si può recuperare questa corrente usando uno specchio di corrente tra MP1 e MP2
- In questo modo tutta la corrente di segnale nel circuito arriva sul carico RL nel nodo di uscita
- Il guadagno è:

$$\frac{V_o}{V_i} = -2 \cdot g_{mMN} \cdot (r_{oMN} // r_{oMP} // R_L)$$



V - 93

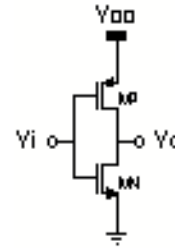
October 27, 2007

L' invertitore CMOS

- L' inverter è la più semplice porta logica
- Tabella della verità

In	Out
1	0
0	1

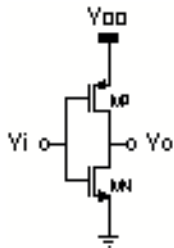
- 0 e 1 sono livelli logici che quando riportati in un circuito reale diventano dei livelli di tensione.
- I livelli di tensione che corrispondono a 0 e 1 dipendono dall'implementazione della funzione logica.
- Esistono molte possibili implementazioni e quindi molti diversi possibili livelli logici (ECL, TTL, NMOS, CMOS)
- L'implementazione più diffusa è quella CMOS.
- L'inverter CMOS è il seguente



V - 94

October 27, 2007

Funzionamento dell' invertitore CMOS



I livelli della logica CMOS sono i seguenti:

Livello logico	Tensione analogica
0	0V (Massa)
1	VDD (Alimentazione)

Si può verificare la tabella della verità:

$V_i = 0V$ (livello logico basso)

$V_{GSN} = 0 < V_{THN} \Rightarrow$ MN è spento

$V_{GSP} = -V_{DD} < V_{THP} \Rightarrow$ MP è acceso

MN off $\Rightarrow I_{MN} = I_{MP} = 0 \Rightarrow$ MP acceso e in zona lineare

$I_{MN} = I_{MP} = 0 \Rightarrow V_{DSP} = 0 \Rightarrow V_o = V_{DD}$

$V_i = V_{DD}$ (livello logico alto)

$V_{GSP} = 0 > V_{THP} \Rightarrow$ MP è spento

$V_{GSV} = V_{DD} > V_{THN} \Rightarrow$ MN è acceso

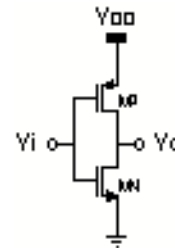
MP off $\Rightarrow I_{MN} = I_{MP} = 0 \Rightarrow$ MN acceso e in zona lineare

$I_{MN} = I_{MP} = 0 \Rightarrow V_{DSN} = 0 \Rightarrow V_o = 0$

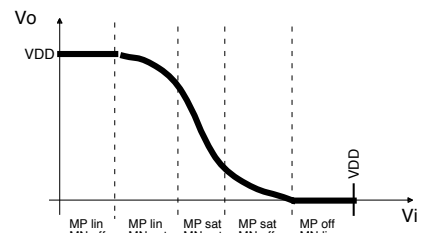
V - 95

October 27, 2007

Funzionamento dell' invertitore CMOS



- È poi possibile tracciare la relazione $V_o(V_i)$ per ogni valore di V_i in $[0V, V_{DD}]$

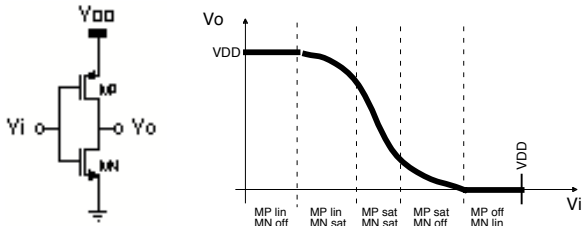


- A seconda del valore di V_i i transistor MN e MP possono trovarsi a lavorare in diverse condizioni

V - 96

October 27, 2007

Dissipazione di potenza nei circuiti logici CMOS



- Vantaggio FONDAMENTALE della logica CMOS e' che:
per $V_i=0V$, MN e' spento,
per $V_i=V_{DD}$, MP e' spento
 \Rightarrow per entrambi gli stati logici non c'e' un cammino per la corrente da V_{DD} a massa
 \Rightarrow la logica CMOS non dissipa potenza STATICA
 \Rightarrow cioe' senza commutazioni, i circuiti logici CMOS non hanno bisogno di potenza

Allora quando consuma potenza ?

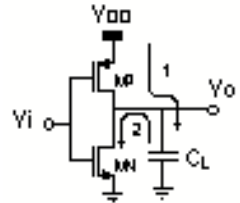
V - 97

October 27, 2007

Dissipazione di potenza dinamica

La logica CMOS dissipa potenza dinamica, cioe' durante le commutazioni:

Si supponga di avere un segnale V_i basso. V_o e' quindi alto. Il condensatore di carico (C_L) e' caricato (durante una precedente fase di clock) a V_{DD} con carica $Q_{CL}=C_L \cdot V_{DD}$ (freccia 1).



Si supponga ora che V_i da basso diventi alto (V_{DD}). Allora la carica Q_{CL} immagazzinata su C_L si scarica verso massa (freccia 2).

- Si verifica quindi un passaggio netto di carica (Q_{CL}) da V_{DD} a massa, il che corrisponde ad una dissipazione di energia
- Il carico C_L e' sempre presente in quanto e' anche dovuto dalle porte logiche connesse in cascata a quella in esame

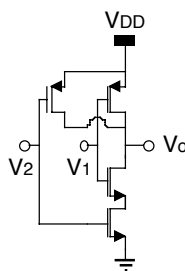
V - 98

October 27, 2007

Altre porte logiche CMOS

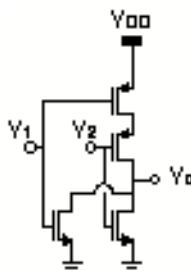
NAND

V_1	V_2	V_o
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



NOR

V_1	V_2	V_o
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



V - 99

October 27, 2007

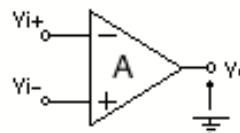
Capitolo V

L' amplificatore operazionale

Indice

Definizioni	2
Il concetto di massa virtuale	3
L'amplificatore ideale	6
L'amplificatore reale	8
Stadi elementari	15
Misura delle caratteristiche di un ampop	56
Filtri analogici	74
Stabilita' dei sistemi reazionati	96
Il comparatore	110

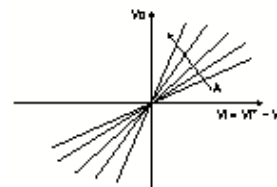
Definizioni



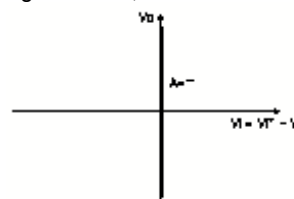
- L'amplificatore operazionale e' un amplificatore di tensione comandato in tensione.

- La relazione ingresso-uscita e' quindi:

$$V_o = A \cdot (V_{i+} - V_{i-})$$

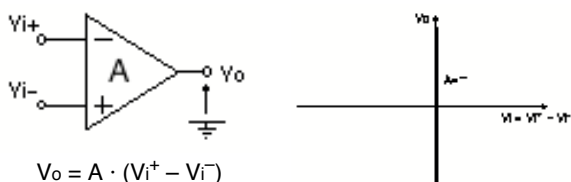


- L'amplificatore operazionale ideale e' caratterizzato dall' avere guadagno infinito, cioe' con la caratteristica:



- Ovviamente e' solo un modello ideale, non realizzabile in realta'.
- Risulta pero' valido per determinati livelli di precisione che si vogliono ottenere

Il concetto di massa virtuale



- Facendo operare l'amplificatore ideale ($A=\infty$) ad anello aperto, l'uscita assume valori finiti solo se l'ingresso e' nullo (o quasi), cioe' per:

$$(V_{i+} - V_{i-}) = 0$$

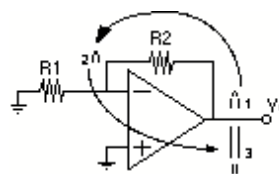
cioe'

$$V_{i+} = V_{i-}$$

- Quindi, se l'uscita assume un valore finito i due terminali di ingresso devono essere alla stessa tensione
- Serve un dispositivo / meccanismo che tenga l'amplificatore ad operare con V_o finito
- Questo meccanismo e' la REAZIONE NEGATIVA.
- Un amplificatore operazionale e' tipicamente (quasi sempre) utilizzato in configurazioni retroazionate negativamente (cioe' ad anello chiuso)

La retroazione

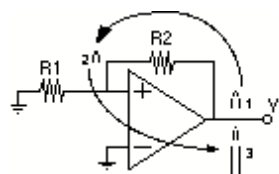
- Retroazione negativa



Ad un disturbo (1), il circuito risponde (in (2) per arrivare in (3)) con un segnale che si oppone e tende ad annullare quello di partenza.

Il circuito tende a ristabilire le condizioni precedenti al disturbo.

- Retroazione positiva



Ad un disturbo (1), il circuito risponde (in (2) per arrivare in (3)) con un segnale che si sovrappone (con un notevole guadagno) a quello di partenza.

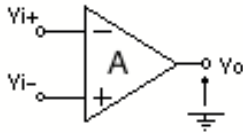
Il circuito tende a far divergere il valore dell' uscita

Il principio di massa virtuale

Se sono verificate le seguenti ipotesi:

- La reazione e' negativa
- La reazione e' attiva
- L'amplificatore operazionale ha guadagno infinito

=> Allora vale il principio di massa virtuale per cui la tensione ai due nodi di ingresso dell' amplificatore operazionale sono uguali



$$V_o = A \cdot (V_i^+ - V_i^-)$$

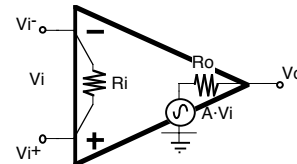
$$A \rightarrow \infty$$

$$V_i^+ = V_i^-$$

Il principio di massa virtuale non vale se la reazione non e' attiva, il che accade, ad esempio, se:

- nel circuito di reazione c'e' un componente (diodo, transistor, condensatore in continua) che non opera in regione attiva
- l'amplificatore operazionale non opera in regione attiva (non vale cioe' la legge $V_o = A \cdot (V_i^+ - V_i^-)$), ad esempio se:
 - e' spento
 - e' in saturazione
 - e' in slew-rate

L'amplificatore ideale



- Le caratteristiche di un amplificatore ideale sono le seguenti:

- Guadagno infinito

$$A = \infty$$

- Impedenza di ingresso infinita

$$R_i = \infty$$

cio' comporta

$$I_i = 0$$

(altrimenti, con $R_i = \infty$, risulterebbe $V_i = \infty$ con $I_i \neq 0$)

- Impedenza di uscita nulla

$$R_o = 0$$

cio' comporta che l'amplificatore possa erogare qualsiasi quantita' di corrente, mentre la sua tensione di uscita deve essere imposta dal circuito esterno

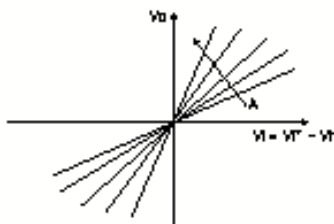
- Escursione del nodo di uscita infinita
- Banda infinita

Le prestazioni di un amplificatore reale differiscono da quelle dell'amplificatore ideale.

L'amplificatore reale

Guadagno finito

- L' amplificatore reale presenta un guadagno finito (A_o)



$$V_o = A \cdot (V_i^+ - V_i^-)$$

Questo limita l'applicazione del principio di massa virtuale a certi casi con una data precisione.

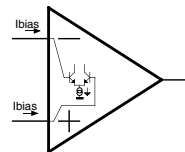
L'amplificatore reale

Impedenza di ingresso / Corrente di ingresso

- Lo stadio di ingresso di un amplificatore operazionale e' uno stadio differenziale.
- Lo stadio differenziale puo' essere costruito con i diversi dispositivi studiati
- In base al dispositivo, si puo' avere o meno una corrente di ingresso e, di conseguenza, una R_i finita.

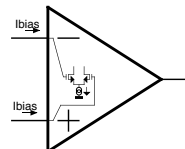
- Stadio di ingresso con dispositivi BJT

La I_{bias} e' la corrente di base del transistor BJT, che e' quindi non nulla



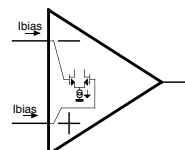
- Stadio di ingresso con dispositivi MOS

La I_{bias} e' la corrente di gate del transistor MOS, che e' quindi nulla



- Stadio di ingresso con dispositivi JFET

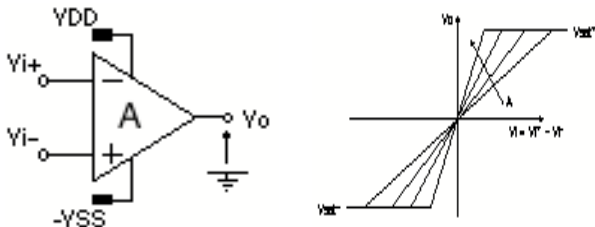
La I_{bias} e' la corrente di gate del transistor JFET (corrente di una giunzione polarizzata in inversa), che e' quindi molto piccola



L'amplificatore reale

Tensioni di saturazione

- L' amplificatore reale e' alimentato tra V_{DD} e $-V_{SS}$
- Le sue uscite devono quindi essere incluse tra due valori V_{sat}^+ ($<V_{DD}$) e V_{sat}^- ($>-V_{SS}$)



Quando l'uscita si porta ad uno dei due livelli di saturazione, l' amplificatore non si comporta piu' correttamente (non vale piu' la sua legge fondamentale $V_o = A \cdot (V_{i+} - V_{i-})$)

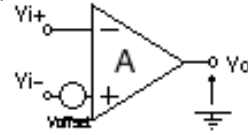
Pertanto

- la reazione si apre all'interno dell'amplificatore,
- non vale piu' il principio di massa virtuale ed
- una tensione tende ad esserci tra i morsetti di ingresso

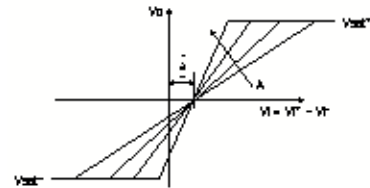
L'amplificatore reale

Tensione di offset

- La tensione di offset e' la tensione che si deve applicare all'ingresso per avere tensione di uscita nulla.
 - Si modella come un generatore di tensione *continua* su un morsetto dell'amplificatore
- (per studiare l'effetto dell'offset possono essere eliminati tutti i componenti che non sono attivi in continua - es.: condensatori)



- La caratteristica dell'amplificatore risulta spostata della quantita Voffset.



- Tale fenomeno e' dovuto ad un mismatch tra i due rami dello stadio differenziale.

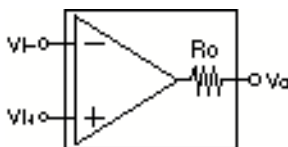
La Voffset di strutture con transistor BJT e' minore di quella con transistor MOS e JFET

L'amplificatore reale

Impedenza di uscita

- L'amplificatore operazionale reale ha un'impedenza di uscita (R_o) non-nulla.

Cio' si puo' schematizzare come segue:



- L' effetto dell' impedenza di uscita (R_o) non-nulla va visto in correlazione con il valore del guadagno dell' amplificatore.

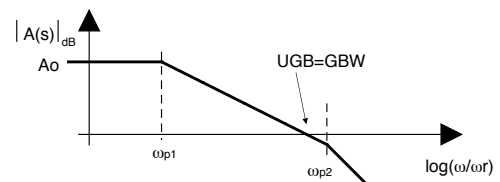
L'amplificatore reale

Risposta in frequenza

- Un amplificatore reale in anello aperto ha una risposta in frequenza del tipo:

$$A(s) = \frac{A_o}{(1 + s/\omega_{p1}) \cdot (1 + s/\omega_{p2})}$$

- Il cui diagramma di Bode per l'ampiezza e' il seguente



- Talvolta il secondo polo e' a frequenza molto alta e puo' essere trascurato. Allora si e' nella condizione di polo dominante.
- GBW (Gain-BandWidth) e' il prodotto banda-guadagno ed e' definito come:

$$GBW = A_o \cdot \omega_{p1}$$

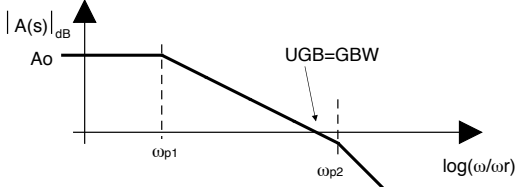
- UGB (Unity-Gain-Bandwidth) e' la pulsazione per cui l'operazionale ha guadagno unitario (0dB)
- Nel caso di polo dominante, $GBW = UGB$
- L' eventuale utilizzo di un amplificatore ad anello aperto risulta possibile fino alla pulsazione ω_{p1} , oltre la quale l'amplificatore inizia a cambiare il valore del guadagno

L'amplificatore reale

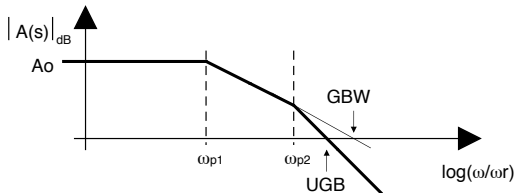
Risposta in frequenza

Un amplificatore reale puo' essere:

- compensato internamente
 - presenta una risposta a polo dominante
 - $UGB=GBW$
 - e' comunque stabile
 - ha banda piu' stretta



- compensato esternamente
 - presenta piu' di un polo prima del UGB
 - $UGB \neq GBW$
 - non e' comunque stabile e necessita di essere stabilizzato dalla rete esterna
 - ha banda piu' larga



V - 13

October 27, 2007

L'amplificatore reale

Tabella delle prestazioni

Amplificatore AD741 ($\mu A741$)

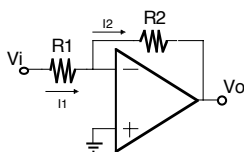
Guadagno in continua (A_0)	dB	106dB
Prodotto Banda-Guadagno (GBW)	MHz	1
Alimentazione	V	$\pm 15V$ $V_{DD}=15V$ $V_{SS}=-15V$
Potenza	mW	50
Escursione sul nodo di uscita	V	$\pm 10V$ $V_{sat+}=10V$ $V_{sat-}=-10V$
Rapporto di Reiezioni dei disturbi sull'alimentazione (PSRR)	dB	-90
Impedenza di ingresso (R_i)	M Ω	1
V_{offset}	mV	0.5
I_{bias} (ingresso BJT)	nA	5

V - 14

October 27, 2007

Stadi elementari

La configurazione invertente



- L'amplificatore e' ideale ($A=\infty$) e quindi vale il principio di massa virtuale.

$$V_i^+ = V_i^- = 0$$

- Si puo' scrivere la legge di Kirchoff al nodo di ingresso negativo

$$I_1 = \frac{V_i - 0}{R_1} = I_2 = \frac{0 - V_o}{R_2}$$

Da cio' si ricava:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

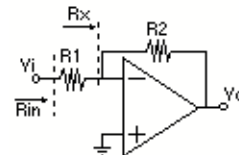
- L'amplificazione V_o/V_i dipende solo dalle resistenze (che costituiscono la rete di reazione) e non dal guadagno dell'amplificatore
- Con $R_1=R_2$ si ottiene uno stadio di guadagno -1 , che potrebbe servire a disaccoppiare due stadi
Pero' puo' risultare problematico per la sua impedenza di ingresso finita

V - 15

October 27, 2007

Stadi elementari

Amplificatore invertente: impedenza di ingresso



Si applica un generatore di tensione di test (V_t) e si valuta la corrente che il circuito assorbe (I_t).

Se l'amplificatore e' ideale ($A=\infty$), vale il principio di massa virtuale, cioe' $V_i^+ = V_i^- = 0$.

La corrente e' quindi data da:

$$I_t = \frac{V_t - V_i^-}{R_1} = \frac{V_t}{R_1}$$

Ne segue che l'impedenza di ingresso e' data da:

$$R_{in} = R_1$$

Ne segue che l'impedenza vista in massa virtuale R_x e' nulla.

Esempio: Dato un generatore di segnale di 10V capace di erogare 2mA, si dimensiona R_1 e R_2 in modo da poter guadagnare -2 .

La corrente massima si ottiene per il segnale massimo cioe':

$$I_{max} = \frac{10V}{R_1} \leq 2mA$$

Se vale l'uguale si ottiene:

$$R_1 = 5k\Omega$$

Da cui

$$R_2 = 10k\Omega$$

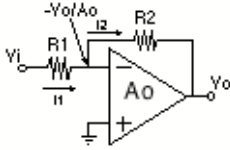
V - 16

October 27, 2007

Stadi elementari

Amplificatore invertente: Effetto del guadagno finito

Guadagno V_o/V_i



Se $A_o \neq \infty$, allora si può scrivere:

$$V_o = A_o \cdot (V_i^+ - V_i^-)$$

Da ciò per $V_i^+ = 0$, si ricava:

$$V_i^- = -\frac{V_o}{A_o}$$

Inoltre vale sempre l'equazione di Kirchhoff, che diventa:

$$I_1 = \frac{V_i - V_i^-}{R_1} = I_2 = \frac{V_i^- - V_o}{R_2}$$

Risolvendo per V_o si ottiene:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

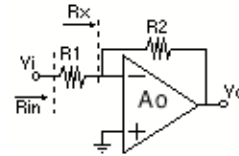
Per $A_o \Rightarrow \infty$, il guadagno diventa quello dell'amplificatore ideale ($V_o/V_i = -R_2/R_1$).

Esempio: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$ ($V_o/V_i = -2$)

$A_o = 10$	$V_o/V_i = -1.5385$
$A_o = 100$	$V_o/V_i = -1.9417$
$A_o = 1000$	$V_o/V_i = -1.9940$
$A_o = 10000$	$V_o/V_i = -1.9994$

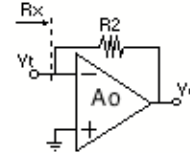
Stadi elementari

Amplificatore invertente: Effetto del guadagno finito Impedenza di ingresso



R_{in} si può scomporre in $R_{in} = R_1 + R_x$

- Calcolo di R_x



$$V_o = -A_o \cdot V_t$$

$$I_t = \frac{V_t - (-A_o \cdot V_t)}{R_2} = \frac{(1 + A_o) \cdot V_t}{R_2}$$

Da cui:

$$R_x = \frac{V_t}{I_t} = \frac{R_2}{1 + A_o}$$

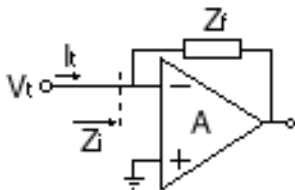
Si può allora scrivere:

$$R_{in} = R_1 + R_x = R_1 + \frac{R_2}{1 + A_o}$$

Verifica:

per $A_o \rightarrow \infty$, R_{in} tende al valore già calcolato per $A_o = \infty$

Effetto Miller



Posta un'impedenza generica (Z_f) ai capi di un amplificatore invertente (di guadagno A), si calcolino l'impedenza di ingresso (Z_i).

Si applica V_t e si calcola I_t .

$$I_t = \frac{V_t - (-A \cdot V_t)}{Z_f} = V_t \cdot \frac{1 + A}{Z_f}$$

Da cui:

$$Z_i = \frac{Z_f}{1 + A} \approx \frac{Z_f}{A}$$

L'impedenza in reazione viene divisa per il guadagno dell'amplificatore.

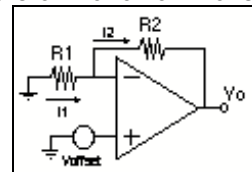
N.B.: se Z_f è un condensatore ($Z_f = \frac{1}{s \cdot C_f}$)

$$Z_i = \frac{1}{s \cdot A \cdot C_f} = \frac{1}{s \cdot (A \cdot C_f)}$$

cioè il condensatore viene moltiplicato per A

Stadi elementari

Amplificatore invertente: Effetto dell'offset



$$\frac{V_o}{V_{\text{offset}}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \text{Guadagno del segnale}$$

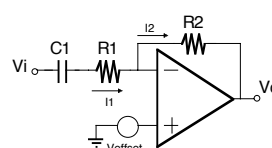
L'offset potrebbe portare l'amplificatore in saturazione

(Esempio: $V_{\text{offset}} = 20\text{mV}$, $R_2 = 100\text{k}\Omega$, $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $V_o = 2.02\text{V}$)

Riduzione dell'offset

L'offset in uscita può essere ridotto se il segnale è su una banda di frequenze più alte della banda (strettissima/nulla) dell'offset.

In questo caso si può usare lo schema



Per il calcolo dell'effetto dell'offset (che da un contributo a frequenza zero), il condensatore si comporta come circuito aperto

L'uscita è data da:

$$V_o = -V_i \cdot \frac{s \cdot C_1 \cdot R_2}{1 + s \cdot C_1 \cdot R_1} + V_{\text{offset}}$$

Stadi elementari

Amplificatore invertente: Resistenze parassite

- La relazione che fissa il guadagno e' la legge di Kirchoff al nodo di ingresso invertente.

Pertanto:

- R_3 non entra nel bilancio di corrente al nodo V_i^- ed e' quindi ininfluente sul guadagno V_o/V_i (e' importante per valutare la corrente totale erogata dall'amplificatore operazionale)
- R_4 e' collegata al nodo V_i^- e quindi deve essere considerata nell'equazione della legge di Kirchoff.

$$I_1 = I_4 + I_2$$

Pero':

- Se l'amplificatore e' ideale ($A=\infty$) allora $V_i^-=0$, ai capi di R_4 non c'e' caduta di tensione e pertanto non assorbe corrente, risultando ininfluente su V_o/V_i
- Se A_o e' finito allora si scrive:

$$\frac{V_i - (-V_o/A_o)}{R_1} = \frac{-V_o/A_o}{R_4} + \frac{-V_o/A_o - V_o}{R_2}$$

Da cui si ottiene:

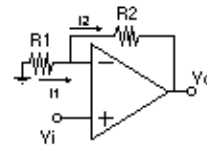
$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4}{A_o \cdot R_1 \cdot R_4}}$$

Si puo' anche calcolare la resistenza di ingresso:

$$R_{in} = R_1 + \left(R_4 \parallel \frac{R_2}{1+A_o} \right)$$

Stadi elementari

La configurazione non-invertente



Il guadagno V_o/V_i si calcola ancora dalla relazione di Kirchoff al nodo V^- .

Se $A=\infty$ (amplificatore ideale) allora

$$V^- = V^+ = V_i$$

Da cui si scrive:

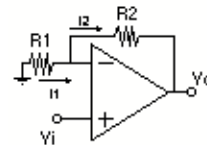
$$I_1 = \frac{0 - V_i}{R_1} = I_2 = \frac{V_i - V_o}{R_2}$$

Si ricava quindi:

$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Il guadagno e' sempre maggiore di 1

Amplificatore non-invertente: Impedenza di ingresso



- La corrente assorbita dall'ingresso dell'amplificatore e' sempre nulla \Rightarrow l'impedenza vista da V_i e' sempre ∞

$$R_{in} = \infty$$

Stadi elementari

Amplificatore non-invertente: Effetto del guadagno finito

Il guadagno finito A_o comporta che:

$$V_o = A_o \cdot (V^+ - V^-) = A_o \cdot (V_i - V^-)$$

$$V^- = V_i - \frac{V_o}{A_o}$$

Il guadagno V_o/V_i si calcola dalla legge di

Kirchoff al nodo V^- :

$$I_1 = \frac{0 - V^-}{R_1} = I_2 = \frac{V^- - V_o}{R_2}$$

Risolvendo per V_o (sostituendo V^-) si ottiene:

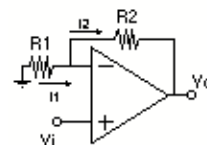
$$\frac{V_o}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{1+R_1} \cdot \frac{1}{A_o}}$$

- Per $A_o \Rightarrow \infty$, V_o/V_i torna al valore calcolato nel caso ideale.
- Il guadagno V_o/V_i diventa funzione di A_o .
- Esempio: $R_1=1k\Omega$, $R_2=3k\Omega$

$A_o=10$	$V_o/V_i = 2.3077$
$A_o=100$	$V_o/V_i = 2.9126$
$A_o=1000$	$V_o/V_i = 2.9910$
$A_o=10000$	$V_o/V_i = 2.9991$

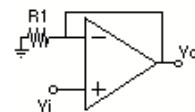
Stadi elementari

Amplificatore non-invertente: buffer di tensione



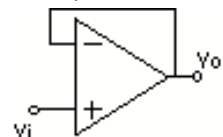
$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Caso particolare: per $R_2=0$ si ha un buffer di tensione ($V_o/V_i = 1$)



- L'impedenza di ingresso (vista da V_i) e' ∞

- R_1 non serve. Anzi richiede una corrente che deve essere fornita dall'amplificatore. Quindi R_1 puo' essere eliminata



- Effetto del guadagno finito

$$V_o = A_o \cdot (V^+ - V^-) = A_o \cdot (V_i - V_o)$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A_o}{1 + A_o}$$

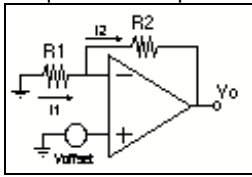
- Esempio:

$A_o=10$	$V_o/V_i = 0.9091$
$A_o=100$	$V_o/V_i = 0.9901$
$A_o=1000$	$V_o/V_i = 0.9990$
$A_o=10000$	$V_o/V_i = 0.9999$

Stadi elementari

Amplificatore non-invertente - Effetto dell'offset

- Il circuito per lo studio dell'effetto dell'offset e' lo stesso di quello dell'amplificatore invertente

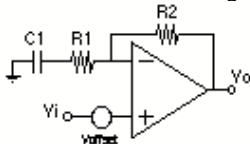


$$\frac{V_o}{V_{offset}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{V_o}{V_{offset}} = \text{Guadagno del segnale}$$

Riduzione dell'offset

Analogamente al caso invertente, un possibile schema per la riduzione dell'offset in uscita e' il seguente:



L'uscita e' data da (V_i e V_{offset} qui sono in serie):

$$V_o = (V_i + V_{offset}) \cdot \frac{1 + s \cdot C_1 \cdot (R_1 + R_2)}{1 + s \cdot C_1 \cdot R_1}$$

- V_{offset} e' solo a bassa frequenza ($s \approx 0$) e guadagna

$$\frac{V_o}{V_{offset}} = 1$$

- Il segnale V_i e' solo ad alta frequenza ($s \gg 0$) e guadagna

$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Stadi elementari

Sommatore

- L' amplificatore invertente puo' essere concettualmente scomposto in due stadi:

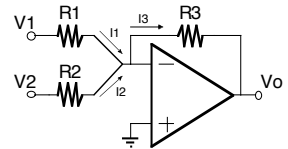
$$V_{in} \rightarrow I_1 \rightarrow V_o$$

E' possibile eseguire la somma di segnali in corrente.

Con N ingressi sono necessari N stadi che realizzano la trasformazione ($V_i \rightarrow I_i$)

Le N correnti cosi' generate vengono tutte iniettate in massa virtuale.

- Esempio (N=2):



$$V_o = -R_3 \cdot \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right)$$

Il circuito puo' essere studiato con la sovrapposizione degli effetti:

$$\text{Applico } V_1 \text{ con } V_2=0 \Rightarrow V_o = -\frac{R_3}{R_1} \cdot V_1$$

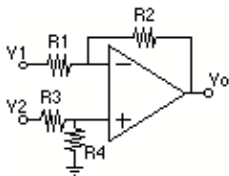
$$\text{Applico } V_2 \text{ con } V_1=0 \Rightarrow V_o = -\frac{R_3}{R_2} \cdot V_2$$

Sommando i due termini

$$V_o = -R_3 \cdot \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right)$$

Stadi elementari

Stadio delle differenze



$$V^+ = V_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Per il principio di massa virtuale

$$V^- = V^+ = V_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\frac{V_1 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2}$$

Da cui si ricava:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot V_2$$

Si poteva operare anche con la sovrapposizione degli effetti.

Si applica solo V_1 e si ottiene:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_1$$

Si applica solo V_2 e si ottiene:

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot V_2$$

Sommando i due termini si ottiene:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot V_2$$

Effetto delle correnti di polarizzazione

Si considerano le due correnti di polarizzazione (i_{b+} e i_{b-}) come due generatori indipendenti.

Si applica la sovrapposizione degli effetti.

Si applica i_{b+} ($i_{b-}=0$). Si ha che:

$$V^+ = -i_{b+} \cdot R_4$$

e quindi:

$$V_o^{i_{b+}} = -i_{b+} \cdot R_4 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Si applica i_{b-} ($i_{b+}=0$). Si ha che:

$$V^- = 0$$

Allora i_{b-} scorre tutta su R_2 e si ottiene:

$$V_o^{i_{b-}} = i_{b-} \cdot R_2$$

Sommando i due termini e supponendo $i_{b+}=i_{b-}=i_b$ si ha:

$$V_o = V_o^{i_{b+}} + V_o^{i_{b-}} = -i_b \cdot R_4 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + i_b \cdot R_2$$

$$V_o = i_b \cdot (R_2 - R_4 \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right))$$

Per annullare il contributo di i_b si deve imporre:

$$R_2 = R_4 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

e cioe':

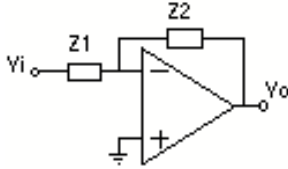
$$R_4 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$

Stadi elementari

Uso di impedenze complesse

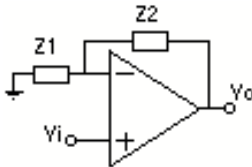
Tutte i circuiti finora studiati usando resistenze, possono essere studiati sostituendo alle resistenze delle impedenze complesse.

Amplificatore invertente



$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

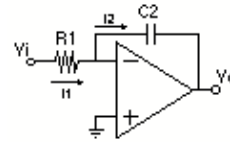
Amplificatore invertente



$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

Stadi elementari

Integratore

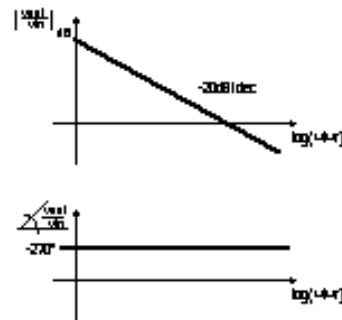


E' uno stadio invertente (R_2 e' sostituito da $\frac{1}{s \cdot C_2}$)

Quindi si ottiene:

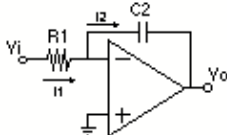
$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{s \cdot R_1 \cdot C_2}$$

Si possono tracciare i relativi diagrammi di Bode:



Stadi elementari

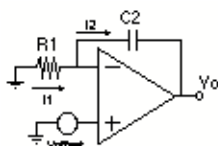
Integratore



La struttura in realta' non e polarizzabile in continua in quanto la reazione negativa non e' attiva.

Infatti, in continua C_2 e' un circuito aperto e quindi in cocontinua non c'e' alcun circuito di reazione che mantiene l'amplificatore in zona lineare.

Effetto dell'offset



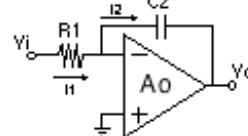
Se ad esempio si considera un eventuale offset applicato su morsetto V^+ , questo si riporta su V^- e la corrente ($\frac{V_{offset}}{R_1}$) si integra su C_2 finche' l'amplificatore satura.

Allo stesso modo, applicando una $V_i \neq 0$ in continua, con $A = \infty$ e senza reazione, l'amplificatore opera ad anello aperto e satura.

Stadi elementari

Integratore: Effetto del guadagno finito

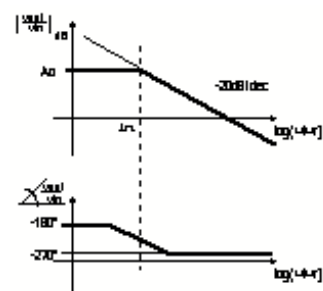
Effetto del guadagno finito



$$\frac{V_i - (-V_o/A_o)}{R_1} = \frac{(-V_o/A_o) - V_o}{\frac{1}{s \cdot C_2}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{A_o}{1 + s \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot (1 + A_o)}$$

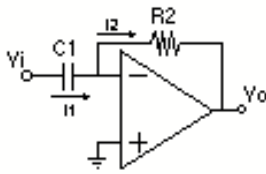
Diagrammi di Bode



In continua il C non e' 'attivo' e quindi il guadagno di tensione risulta $V_o/V_i = -A_o$

Stadi elementari

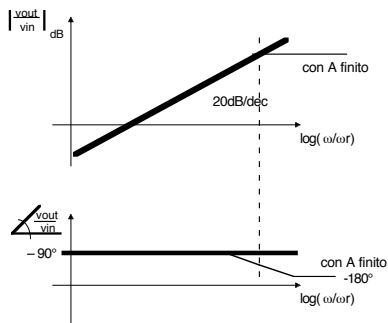
Derivatore



$$\frac{V_i}{1/s \cdot C1} = -\frac{V_o}{R2}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = -s \cdot C1 \cdot R2$$

Diagrammi di Bode



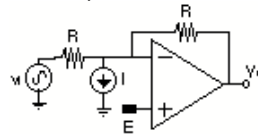
V - 33

October 27, 2007

Polarizzazione vs. segnale

- Anche per i circuiti con gli amplificatori operazionali, va prima valutato il punto di lavoro, e poi il circuito per il piccolo segnale.

Esempio

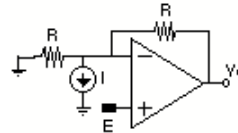


$$E=2V$$

$$I=1mA$$

$$R=1k\Omega$$

Polarizzazione: si spegne v_i e il circuito diventa:



Con la sovrapposizione degli effetti si ottiene:

Si applica E (e si spegne I):

$$V_{o_E} = E \cdot \left(1 + \frac{R}{R}\right) = 2 \cdot E = 4V$$

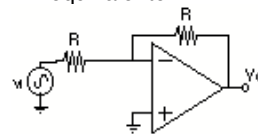
Si applica I (e si spegne E), la corrente I passa tutta sulla resistenza in reazione:

$$V_{o_I} = R \cdot I = 1V$$

In totale si ottiene:

$$V_o = V_{o_E} + V_{o_I} = 5V$$

Segnale: il circuito equivalente di un amplificatore operazionale e' un amplificatore operazionale (il suo guadagno e' lineare !) e si ottiene il seguente circuito equivalente:



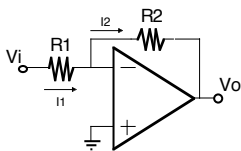
Si ottiene:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R}{R} = -1$$

V - 34

October 27, 2007

Tensione di saturazione



$$V_{sat}^+ = 5V$$

$$V_{sat}^- = -5V$$

$$R1 = 1k\Omega$$

$$R2 = 1k\Omega$$

$$V_i = 10V \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Se non intervenisse la saturazione degli amplificatori, il segnale di uscita sarebbe:

$$V_o = -10V \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \cdot \frac{R2}{R1} = -10V \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

In realta' l'operazionale non puo' avere l'uscita superiore a 5V, e pertanto l'uscita si porta al livello di saturazione.

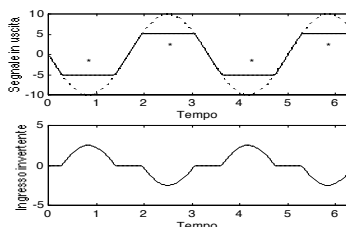
In questo caso, l'amplificazione dell'amplificatore e' nulla (se si applica un piccolo segnale in ingresso l'uscita non cambia e rimane alla saturazione)

=> L'anello di reazione e' aperto e il principio di massa virtuale non vale piu'.

Il nodo di ingresso invertente dell'amplificatore puo' quindi muoversi e si porta a

$$V_- = V_i + (V_{sat} - V_i) \cdot \frac{R1}{R1 + R2}$$

Il diagramma di V_o e di V_- e' il seguente:



Negli intervalli con V_{sat} la reazione e' aperta

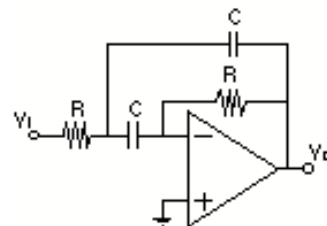
V - 35

October 27, 2007

Esercizio (I)

Testo

L' amplificatore operazionale e' ideale.



$$R = 10k\Omega$$

$$C = 1\mu F$$

a - si determini la funzione di trasferimento $\frac{V_o}{V_i}(s)$

b - si traccino i diagrammi di Bode della risposta in frequenza

$$\frac{V_o}{V_i}(j\omega)$$

c - si calcoli l'effetto su V_o di un'offset dell'amplificatore di 10mV

V - 36

October 27, 2007

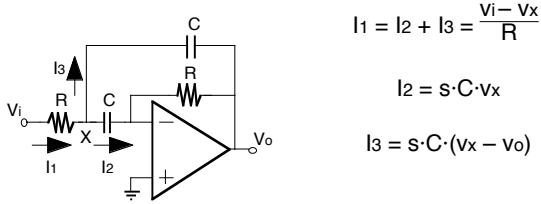
Esercizio (II)

Soluzione

a-

Si imposta un sistema lineare di equazioni di Kirchoff alle maglie od ai nodi.

Si scrive, facendo riferimento alle notazioni riportate in figura, la legge di Kirchoff al nodo x



$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{V_i - V_x}{R}$$

$$I_2 = s \cdot C \cdot V_x$$

$$I_3 = s \cdot C \cdot (V_x - V_o)$$

$$\frac{V_i - V_x}{R} = s \cdot C \cdot V_x + s \cdot C \cdot (V_x - V_o)$$

Si puo' poi scrivere l'equazione di Kirchoff al nodo di massa virtuale:

$$s \cdot C \cdot V_x = -\frac{V_o}{R}$$

Si ricava V_x :

$$V_x = -\frac{1}{s \cdot R \cdot C} \cdot V_o$$

e si sostituisce nell'equazione relativa al nodo x:

$$\frac{V_i}{R} - \frac{V_x}{R} = s \cdot 2 \cdot C \cdot V_x - s \cdot C \cdot V_o$$

$$\frac{V_i}{R} + \frac{1}{s \cdot R^2 \cdot C} \cdot V_o = -\frac{2}{R} \cdot V_o - s \cdot C \cdot V_o$$

Esercizio (III)

Da cio' si puo' ricavare la funzione di trasferimento v_{out}/v_{in}

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{s \cdot R^2 \cdot C} + \frac{2}{R} - s \cdot C} = -\frac{s \cdot R \cdot C}{s^2 \cdot R^2 \cdot C^2 + 2 \cdot s \cdot R \cdot C + 1} =$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s/\tau}{s^2 + 2 \cdot s/\tau + 1/\tau^2}$$

con $\tau = R \cdot C = 10k\Omega \cdot 1\mu F = 0.01 \text{ sec/rad}$

Introducendo i valori numerici si ottiene:

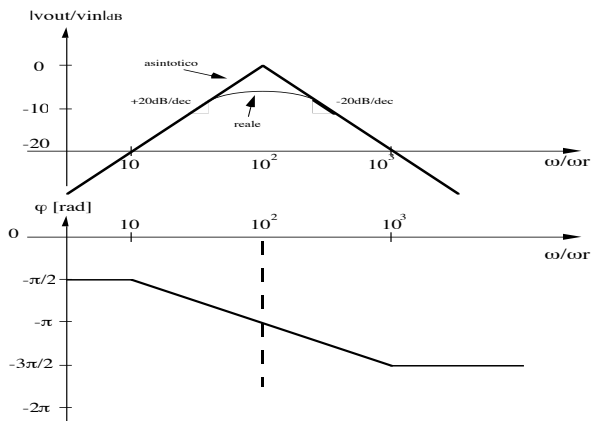
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{s/0.01}{s^2 + 2 \cdot s/0.01 + 1/0.0001} = \frac{100 s}{s^2 + 200 s + 10000}$$

- Il numeratore presenta solo il termine in s
=> la risposta del circuito e' di tipo passabanda.
- Il denominatore indica invece la posizione dei poli (ω_0) ed il loro fattore di merito Q.
Il denominatore in funzione di ω_0 e Q si scrive ($s^2 + \omega_0/Q \cdot s + \omega_0^2$)
- E' possibile ricavare allora ω_0 e Q
 $\omega_0^2 = 1/\tau^2$ quindi $\omega_0 = 1/\tau$
 $\omega_0/Q = 2/\tau$ quindi $Q = \omega_0 \cdot \tau/2 = 1/2$

Esercizio (IV)

b)

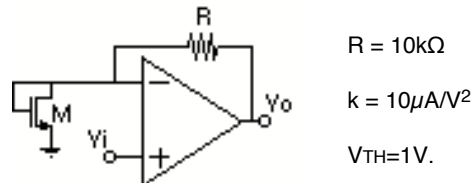
Il diagramma di Bode e' illustrato in figura (con $\omega_r=1$)



Esercizio (I)

Testo

Il MOSFET e' a canale n. L' amplificatore operazionale e' ideale.



Si determini l'andamento della tensione di uscita v_o in funzione della tensione di ingresso v_i per $|v_i| \leq 5V$, e se ne tracci il diagramma cartesiano.

Si dia infine un'espressione del guadagno di piccolo segnale v_o/v_i in funzione del valore di polarizzazione di v_i .

Soluzione

- Il transistor MOS e' in configurazione chiusa a diodo.
=> se $V_{GS} > V_{TH}$, M e' in saturazione e conduce una corrente pari a $(k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2)$.
=> se $V_{GS} < V_{TH}$, M si comporta come un circuito aperto e non conduce corrente
- La reazione attorno all'amplificatore operazionale sempre chiusa
=> il segnale v_i si riporta sempre sul morsetto invertente e quindi comanda il gate del MOS
- Per $v_i < V_{TH} = 1V$ il transistor MOS e' aperto e non conduce corrente; pertanto in R non passa corrente e $v_o = v_i$.

Esercizio (II)

- Per $v_i > V_{TH}$ il MOS e' in saturazione e conduce una corrente pari a

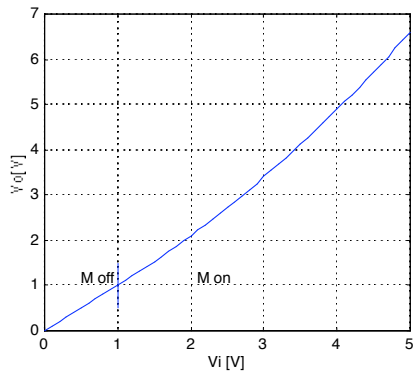
$$I = k \cdot (V_{GS} - V_{TH})^2 = k \cdot (v_i - V_{TH})^2,$$

Tale corrente passa tutta in R.

- La tensione in uscita sara' allora data da

$$v_o = v_i + k \cdot (v_i - V_{TH})^2 \cdot R$$

- Il diagramma cartesiano e' il seguente



Esercizio (III)

2-II guadagno di piccolo segnale dipende dalla polarizzazione del transistor MOS.

Per $V_i < V_{TH}$, M e' spento e quindi e' come se non ci fosse. Il guadagno risulta pertanto:

$$\frac{v_o}{v_i} = 1$$

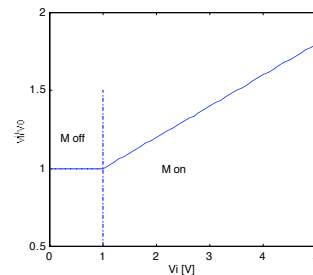
Per $V_i > V_{TH}$, M e' attivo e presenta una impedenza ai suoi capi pari a $1/g_m$, ove g_m dipende dal punto di lavoro, ovvero dal valore di polarizzazione di V_i :

$$g_m = 2 \cdot k \cdot (V_i - V_{TH})$$

Il guadagno v_o/v_i si puo' pertanto scrivere:

$$\frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R}{1/g_m} = 1 + g_m \cdot R$$

Il grafico risulta il seguente:

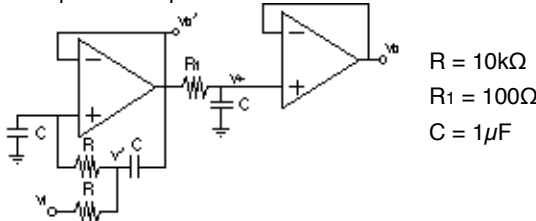


- Essendo il guadagno di piccolo segnale il rapporto incrementale di v_o/v_i , tale grafico si poteva ricavare facendo la derivata di quello precedente.

Esercizio (I)

Testo

Gli amplificatori operazionali sono ideali.



$$\begin{aligned} R &= 10\text{k}\Omega \\ R_1 &= 100\Omega \\ C &= 1\mu\text{F} \end{aligned}$$

a - si determini la funzione di trasferimento v_o/v_i

b - si traccino i diagrammi di Bode di $v_o/v_i(s)$

Soluzione

- Gli amplificatori operazionali sono ideali
=> il nodo v_o' e' a bassa impedenza
=> il circuito si puo' scomporre e studiare come cascata di due stadi
- Il primo avra' come ingresso v_i ed uscita v_o'
- Il secondo ingresso v_o' ed uscita v_o .
- La funzione di trasferimento sara' il prodotto delle due funzioni di trasferimento parziali.

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{v_o'}{v_i} \cdot \frac{v_o}{v_o'}$$

Esercizio (II)

- Per il primo stadio si possono scrivere le equazioni di Kirchoff per le correnti al nodo v' ed al nodo di ingresso non-invertente dell'amplificatore operazionale.

$$\frac{v_i - v'}{R} = \frac{v' - v_o'}{R} + sC (v' - v_o')$$

$$\frac{v' - v_o'}{R} = sC \cdot v_o'$$

- Dalla seconda si ricava v_o' in funzione di v' e si sostituisce nella prima

$$v' = v_o' (1 + s \cdot R \cdot C)$$

$$\begin{aligned} v_i - (1 + s \cdot R \cdot C) \cdot v_o' &= \\ &= (1 + s \cdot R \cdot C) \cdot v_o' - v_o' + s \cdot R \cdot C \cdot ((1 + s \cdot R \cdot C) \cdot v_o' - v_o') \end{aligned}$$

- Risolvendo per v_o'/v_i si ottiene:

$$\frac{v_o'}{v_i} = \frac{1}{(1 + s \cdot R \cdot C) \cdot (1 + s \cdot R \cdot C)}$$

- La funzione di trasferimento v_o/v_o' del secondo stadio e':

$$\frac{v_o}{v_o'} = \frac{1}{\frac{1}{s \cdot C} + R_1} = \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R_1}$$

- La funzione di trasferimento totale si puo' allora scrivere:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{(1 + s \cdot R \cdot C) \cdot (1 + s \cdot R \cdot C)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R_1}$$

Esercizio (III)

- La funzione di trasferimento e' quindi:

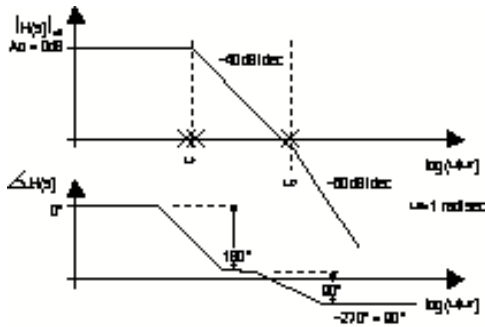
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{(1 + s \cdot R \cdot C) \cdot (1 + s \cdot R \cdot C)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot C \cdot R_1}$$

- Ci sono tre poli, dei quali due alla stessa frequenza

$$\omega_1 = \frac{1}{R \cdot C} = 100 \text{ rad/sec (con molteplicita' due)}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_1 \cdot C} = 10 \text{ krad/sec}$$

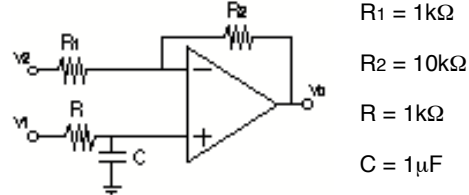
- I diagrammi di Bode (con $\omega_r=1$) sono i seguenti:



Esercizio (I)

Testo

L' amplificatore operazionale e' ideale



1- Per $v_2=0$, determinare la funzione di trasferimento v_o/v_1 del circuito in figura e tracciarne i diagrammi di Bode

2- Tracciare in un grafico l'evoluzione temporale dell'uscita della rete quando all'ingresso 2 e' collegata una batteria ($v_2=1V$) ed all'altro ingresso e' applicato un gradino di ampiezza 1V.

Soluzione

1-

Per il principio di massa virtuale si ha:

$$V_i^+ = V_i^-$$

Applicando un segnale solo su v_1 si ottiene:

$$V_i^+ = V_1 \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

Essendo $V_i^- = V_i^+$, la corrente attraverso R_1 e':

$$I_{R1} = V_i^- / R_1$$

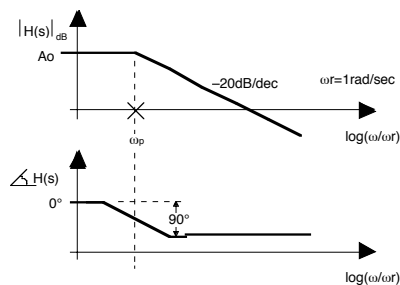
Questa corrente puo' essere fornita dall'uscita dell'amplificatore, perche' l'ingresso non puo' dare corrente. Quindi v_o si ricava:

$$V_o = V_i^- + R_2 \cdot I_{R1} = V_i^- + V_i^- \cdot R_2 / R_1 = V_1 \cdot \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} (1 + R_2 / R_1)$$

$$\frac{V_o}{V_1} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \cdot (1 + R_2 / R_1)$$

Esercizio (II)

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento (con $\omega_r=1$) sono i seguenti:



con:

$$A_0 = (1 + R_2 / R_1)$$

$$\omega_p = \frac{1}{R \cdot C}$$

2.

Avendo due sorgenti di segnale in una rete lineare si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

Applicando v_1 e annullando v_2 si ha:

$$V_x = \frac{V_1}{R + s \cdot C} \cdot \frac{1}{s \cdot C} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} V_1$$

$$V_{o1} = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_1$$

Analogamente applicando v_2 e annullando v_1 si ha:

$$V_{o2} = -\frac{R_2}{R_1} V_2$$

Esercizio (III)

Sommando i due contributi si ha

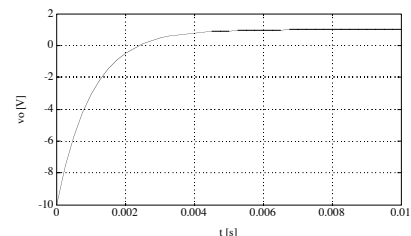
$$V_o = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot V_1 - \frac{R_2}{R_1} \cdot V_2$$

Ora si ha che $v_2=1V$ e v_1 e' un gradino di 1V la cui trasformata e' $1/s$. Si puo' allora scrivere:

$$V_o(s) = \frac{1}{1 + s \cdot R \cdot C} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{s} - \frac{R_2}{R_1} \cdot 1$$

Antitrasformando e sostituendo i valori dei componenti si ottiene:

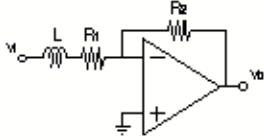
$$V_o(t) = 11 (1 - e^{-1000 \cdot t}) - 10 = 1 - 11 e^{-1000 \cdot t}$$



Esercizio (I)

Testo

L' amplificatore operazionale e' ideale



$$L = 1\text{mH}$$

$$R_1 = 100\Omega$$

$$R_2 = 500\Omega$$

1. Si determini la funzione di trasferimento del circuito e tracciarne il diagramma di Bode
2. Tracciare il grafico dell'evoluzione temporale dell'uscita del circuito quando all'ingresso e' applicato un gradino di ampiezza 2V

Soluzione

1.

Se l'amplificatore e' ideale il suo guadagno e' infinito, e il suo nodo di ingresso invertente opera da massa virtuale ed e' a massa.

La corrente che passa nella serie R1-L si puo' scrivere:

$$I_{R1L} = \frac{V_i - V^-}{R_1 + s \cdot L} = \frac{V_i}{R_1 + s \cdot L}$$

In scorre tutta nella resistenza in reazione R2 e la tensione di uscita si scrive:

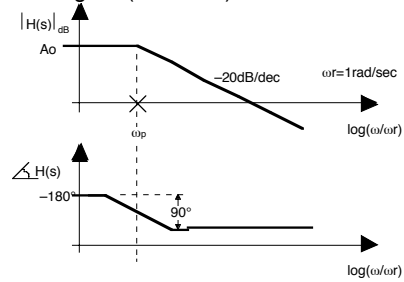
$$V_o = V^- - I_{R1L} \cdot R_2 = - I_{R1L} \cdot R_2 = - \frac{V_i}{R_1 + s \cdot L} \cdot R_2$$

La funzione di trasferimento e' allora

$$\frac{V_o}{V_i} = - \frac{R_2}{R_1 + s \cdot L} = - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot L/R_1}$$

Esercizio (II)

I diagrammi di Bode della funzione di trasferimento sono illustrati in Figura (con $\omega_r=1$).



con:

$$A_0 = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_p = \frac{L}{R_1}$$

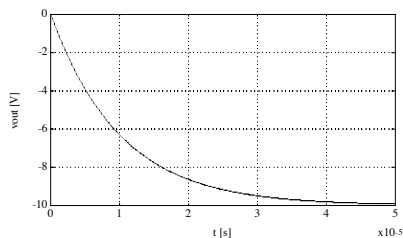
Esercizio (III)

2.

La risposta ad un gradino si ottiene antitrasformando la funzione di trasferimento. Si ottiene allora una risposta del tipo

$$V_o(t) = - \frac{R_2}{R_1} \left(1 - \exp\left(-t \cdot \frac{R_1}{L}\right) \right) \cdot 2V$$

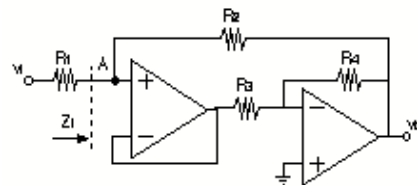
L'evoluzione nel tempo di V_o e':



Esercizio (I)

Testo

Gli amplificatori operazionali sono ideali.



$$R_1 = 1\text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 9\text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 10\text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 20\text{ k}\Omega$$

1. Si determini l'espressione ed il valore dell'impedenza Zi che appare nel punto A.
2. Si determini l'espressione ed il valore del guadagno V_o/V_i
3. Si determini l'espressione del guadagno V_o/V_i nel caso limite $R_4 \rightarrow \infty$.

Soluzione

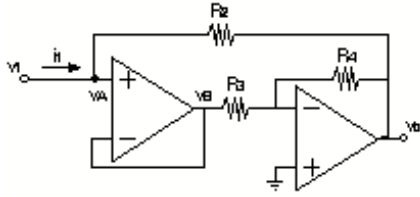
Entrambi gli amplificatori operazionali sono ideali e sono reazionati negativamente; pertanto vale per entrambi il principio del cortocircuito virtuale ai morsetti di ingresso e si ha $V^+ = V^-$.

1.

L'impedenza Zi si determina eliminando il generatore di segnale V_i e la resistenza R_1 , ed applicando nel punto A il generatore di tensione di sonda V_t , come mostrato nella figura.

Risulta pertanto: $Z_i = V_t/I_t$. Poiche' gli operazionali sono ideali, la corrente I_t scorre interamente attraverso la resistenza R_2 .

Esercizio (II)



Il primo amplificatore e' in configurazione buffer non invertente, pertanto $v_B = v_A = v_i$. Il secondo operazionale e' reazionato negativamente tramite la resistenza R_4 ed e' in configurazione di amplificatore invertente. Il guadagno tra il punto B e l'uscita risulta:

$$v_o/v_B = A_v = -R_4/R_3$$

L'espressione per la corrente i_t e':

$$i_t = (v_i - v_o)/R_2$$

Essendo $v_o = A_v \cdot v_B = A_v \cdot v_i$ si puo' anche scrivere:

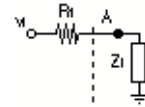
$$i_t = (v_i - v_o)/R_2 = v_i \cdot \frac{1 + R_4/R_3}{R_2}$$

Pertanto, l'impedenza Z_i e' data da:

$$Z_i = \frac{v_i}{i_t} = \frac{R_2}{1 + R_4/R_3}$$

Esercizio (III)

2. Per calcolare il guadagno v_o/v_i e' conveniente sfruttare il risultato ottenuto al punto 1. La tensione v_A puo' infatti essere calcolata sostituendo la parte di circuito che sta a destra della linea sottile con l'impedenza Z_i calcolata al punto 1.



Con riferimento alla figura, si ha:

$$v_A = v_i \cdot \frac{Z_i}{Z_i + R_1}$$

Avendo trovato al punto 1 che risulta $v_o = A_v \cdot v_A$, (con $A_v = -R_4/R_3$) si ha:

$$v_o = A_v \cdot v_A = -\frac{R_4}{R_3} \cdot v_i \cdot \frac{Z_i}{Z_i + R_1}$$

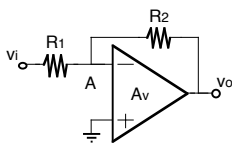
$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2) \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4}$$

Esercizio (IV)

3. Il valore limite del guadagno v_o/v_i si puo' ottenere facendo tendere R_4 all'infinito nell'espressione ottenuta al punto 2:

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Si nota che il circuito proposto puo' essere ridisegnato nel seguente modo:



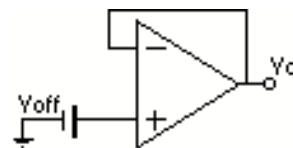
I due amplificatori operazionali reazionati vengono sostituiti da un amplificatore ideale di tensione con guadagno $A_v = -R_4/R_3$. Essendo $v_A = v_o/A_v$ ed avendo v_o valore finito, per $R_4 \rightarrow \infty$ si ha $A_v \rightarrow -\infty$ e di conseguenza $v_A \rightarrow 0$. Il punto A si comporta quindi come una massa virtuale e risulta agevole verificare che in questo limite si ha $v_o/v_i = -R_2/R_1$

Misura delle caratteristiche di un ampop

Misura dell' offset - V_{offset} (I)

L'offset e' tipicamente di qualche mV, e difficilmente supera qualche decina di mV.

E' pertanto difficile apprezzare l'ampiezza dell'offset con, ad esempio, una struttura a buffer



In questo caso infatti l'uscita si porta a:

$$v_o = V_{off}$$

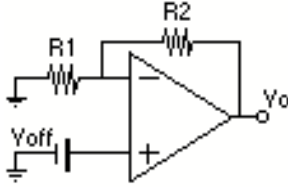
Cioe' a qualche mV, che risulterebbe difficile da misurare.

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un amp

Misura dell' offset (II)

Per poter avere valori apprezzabili all'uscita (in modo da poterli leggere con strumentazione standard) e' quindi necessario amplificarlo.

Si puo' usare il circuito in figura



In questo modo, l'uscita si porta al valore:

$$V_o = V_{off} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Il valore delle resistenze deve essere fissato in modo da ottenere un valore apprezzabile all'uscita (>1V).

E' quindi necessario introdurre un'amplificazione di qualche centinaia

Attezione che in caso di offset molto grande l'uscita potrebbe saturare, allora e' necessario ridurre l'amplificazione.

Conoscendo le resistenze utilizzate e, quindi, l'amplificazione introdotta, e' possibile ricavare il valore dell'offset.

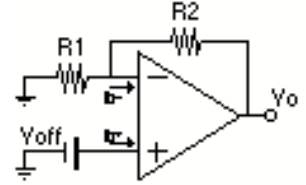
Esempio: $R_1=100\Omega$, $R_2=49.9k\Omega$, $V_o=500 \cdot V_{off}$

Se si misura 2V, allora l'offset e' di 4mV.

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un amp

Misura dell' offset (III)

Tale configurazione risulta sensibile ad un'eventuale corrente di polarizzazione



Infatti l'uscita (utilizzando la sovrapposizione degli effetti ed i risultati gia' ottenuti) si porta:

$$V_o = V_{off} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 \cdot I_b$$

E cio' comporta un errore nella misura

Esempio: $I_b=20\mu A$, $V_{off}=2mV$ (ignoto a chi lo deve misurare)

$$V_o = V_o(V_{off}) + V_o(I_{b1}) = 2mV \cdot 500 + 20\mu A \cdot 49.9k\Omega = \\ V_o = 1V + 0.998V = 1.998V$$

Ignorando questo effetto si ricaverebbe un offset di:

$$V_{off_presunto} = \frac{1.998V}{500} = 3.996mV$$

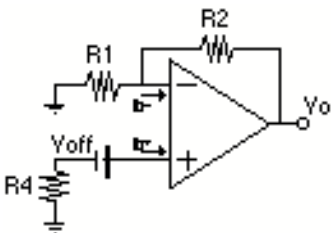
Si commetterebbe quindi un errore del 100% !!

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un amp

Misura dell' offset (IV)

Per ovviare all'effetto delle correnti di polarizzazione, si puo' modificare lo schema in modo da renderlo insensibile alle correnti di polarizzazione.

Lo schema che ne risulta e':



in cui

$$R_4 = R_1 // R_2$$

$$R_4 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

In questo schema l'uscita si porta a:

$$V_o = V_{off} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

e la misura risulta piu' precisa.

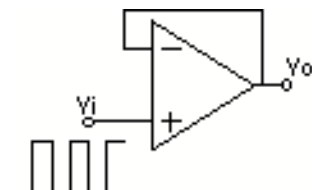
Circuiti per la misura delle caratteristiche di un amp

Misura dello slew-rate - SR (I)

- Lo slew-rate e' la massima velocita' di variazione dell'uscita di un amplificatore operazionale.
- Si misura in V/s
- Tipicamente e' dovuto ad una limitata corrente (I) che carica un certo condensatore (C). Risulta pertanto dato da:

$$SR = \frac{I}{C}$$

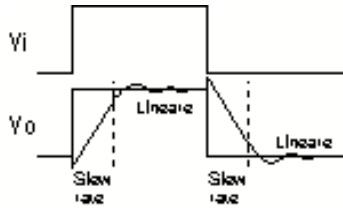
- La capacita' puo' essere interna all'amplificatore od esterna.
- In ogni caso, e' possibile misurare lo slew-rate sollecitando l'amplificatore con una forma d'onda con variazioni molto veloci.
- L'amplificatore rispondera' quindi con una velocita' limitata dallo slew-rate appunto.
- Il circuito che solitamente viene usato e' la configurazione a buffer al cui ingresso viene applicata un'onda quadra.



Circuiti per la misura delle caratteristiche di un ampop

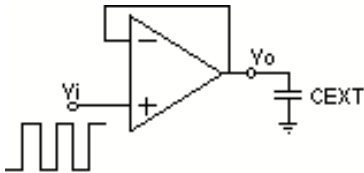
Misura dello slew-rate (II)

- La forma d'onda in uscita e':



- Lo slew-rate per gradini positivi puo' essere diverso da quello per gradini negativi

Per affinare la tecnica di misura e' possibile applicare una capacita' al nodo di uscita



In questo modo lo Slew-Rate e' limitato dal nodo di uscita.

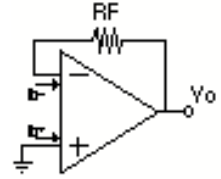
V - 61

October 27, 2007

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un ampop

Corrente di polarizzazione - Ib

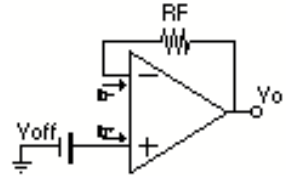
- Un possibile circuito per la misura della corrente di polarizzazione e' il seguente:



- L'uscita si porta a:

$$V_o = I_b \cdot R_F$$

- In realta' bisogna considerare anche l'eventuale tensione di offset



- L'uscita si porta quindi a:

$$V_o = I_b \cdot R_F + V_{off}$$

- Quindi e' necessario dimensionare RF in modo da avere un errore trascurabile dovuto a Voff
- Altrimenti bisognerebbe prima misurare Voff, e poi sottrarlo alla misura delle correnti di polarizzazione.

- Esempio: $I_b = 20 \mu A$, $V_{off} = 2 mV$, $R_F = 50 k\Omega$

Si misura $V_o = 0.998 V$

Da cui si ricava: $I_b = 19.96 \mu A$ (errore = 0.2%)

V - 62

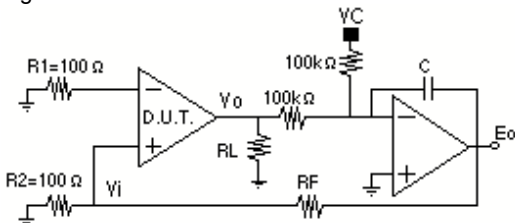
October 27, 2007

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un ampop

Guadagno in continua - Ao (I)

La misura del guadagno (in particolare se questo ha un alto valore) non e' agevole.

Un possibile circuito per la misura del guadagno dell'amplificatore D.U.T. (Device Under Test) e' il seguente:



E' necessario fare due misure.

- 1- Si applica $V_{C1} = 10V$ e si misura E_{o1}

Il morsetto invertente del secondo amplificatore e' una massa virtuale che si porta quindi a 0V.

Applicando V_{C1} , V_{o1} si porta necessariamente a $-V_{C1}$

V_{o1} e' a sua volta correlato con V_{i1} dalla relazione:

$$V_{i1} = V_{o1} / A_o$$

E_{o1} quindi si porta a

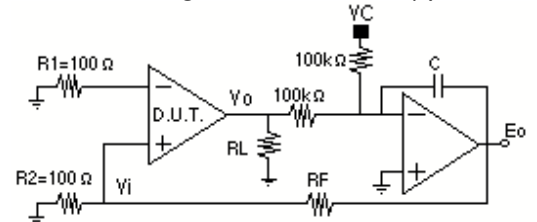
$$E_{o1} = V_{i1} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right) = \frac{V_{o1}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right) = -\frac{V_{C1}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right)$$

V - 63

October 27, 2007

Circuiti per la misura delle caratteristiche di un ampop

Guadagno in continua - Ao (II)



$$E_{o1} = V_{i1} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right) = \frac{V_{o1}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right) = -\frac{V_{C1}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right)$$

- 2- Si applica $V_{C2} = -10V$ e si misura E_{o2} , sempre dalla relazione:

$$E_{o2} = -\frac{V_{C2}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right)$$

A questo punto si fa la differenza dei due risultati

$$E_{o1} - E_{o2} = -\frac{V_{C1}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right) - \left(-\frac{V_{C2}}{A_o} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right)\right)$$

Da questa si ricava A_o :

$$A_o = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{E_{o2} - E_{o1}} \cdot \left(1 + \frac{R_F}{R_2}\right)$$

Da notare che la resistenza R_1 e' utilizzata per eliminare l'effetto delle correnti di polarizzazione

V - 64

October 27, 2007

Effetti della reazione

L'utilizzo di un amplificatore in configurazione reazionata ha benefici sui seguenti parametri:

- Desensibilizzazione del guadagno rispetto a variazioni del guadagno dell'amplificatore operazionale
- Allargamento della banda utile per l'elaborazione del segnale
- Riduzione dell'impedenza di uscita
- Riduzione della distorsione

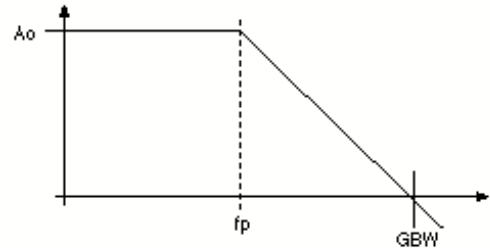
Effetti della reazione

Allargamento della banda utile per l'elaborazione del segnale

Un amplificatore reale in anello aperto ha una risposta in frequenza del tipo:

$$A(s) = \frac{A_o}{1 + s \cdot \tau}$$

Il cui diagramma di Bode per l'ampiezza e' il seguente



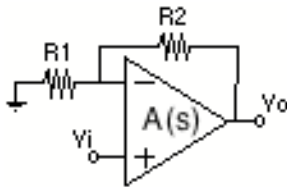
GBW e' il prodotto banda-guadagno ed e' definito come:

$$GBW = \frac{A_o}{2 \cdot \pi \cdot \tau \cdot f_p}$$

Da cio' appare evidente che l'eventuale utilizzo di un amplificatore ad anello aperto risulta possibile fino alla frequenza $\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$, oltre la quale l'amplificatore inizia a cambiare il valore del guadagno.

Effetti della reazione

Si studi ora la risposta in frequenza della configurazione reazionata non-invertente, ove si utilizzi l'amplificatore di cui sopra.



Come ricavato per il caso del guadagno finito, la risposta di tal circuito e':

$$\frac{V_o}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2}{A \cdot R_1}}$$

Al posto di A, si puo' sostituire l'espressione in frequenza del

guadagno $\left(A(s) = \frac{A_o}{1 + s \cdot \tau}\right)$, e si ottiene:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A_o \cdot (R_1 + R_2)}{A_o \cdot R_1 + R_1 + R_2 + s \cdot \tau \cdot (R_1 + R_2)} =$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A_o \cdot (R_1 + R_2)}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau \cdot \frac{R_1 + R_2}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)}}$$

Il polo (f_p') ed il guadagno in continua (H_o) della configurazione retroazionata sono quindi:

$$f_p' = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau \cdot \frac{R_1 + R_2}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)}}$$

$$H_o = \frac{A_o \cdot (R_1 + R_2)}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)}$$

Effetti della reazione

$$f_p' = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau \cdot \frac{R_1 + R_2}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)}} \quad H_o = \frac{A_o \cdot (R_1 + R_2)}{A_o \cdot R_1 + (R_1 + R_2)}$$

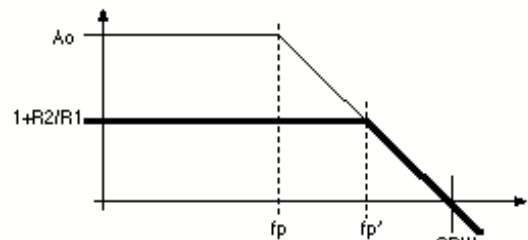
Il prodotto banda-guadagno (GBW) e' dato da:

$$GBW = f_p \cdot H_o = \frac{A_o}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$$

Il valore di GBW ottenuto e' uguale al caso senza reazione

Il valore di banda (f_p) e' molto piu' grande di quello ad anello aperto.

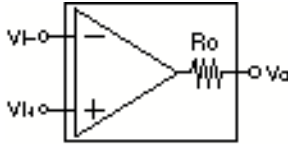
Il risultato della reazione si puo' visualizzare nella seguente figura;



Effetti della reazione

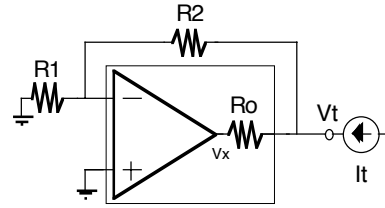
Effetto della reazione sull'impedenza di uscita

- L'amplificatore operazionale ideale ha un'impedenza di uscita nulla.
- L'amplificatore operazionale reale ha invece un'impedenza di uscita (R_o) non-nulla.
- Cio' si puo' schematizzare come segue:



Effetti della reazione

Si valuti ora il valore dell'impedenza di uscita della struttura reazionata, nello schema seguente:



Si impone una corrente di test (I_t) e si calcola la tensione (V_t) che ne risulta.

Essendo il guadagno dell'amplificatore infinito, il morsetto di ingresso invertente e a massa (principio di massa virtuale)

La corrente su R_1 e' quindi nulla.

Ne segue che la corrente su R_2 e' nulla.

Quindi la tensione sul morsetto di uscita (a cui e' connessa R_2) e' a tensione nulla, cioe':

$$V_t = 0$$

L'impedenza di uscita e' quindi:

$$R_o = \frac{V_t}{I_t} = 0$$

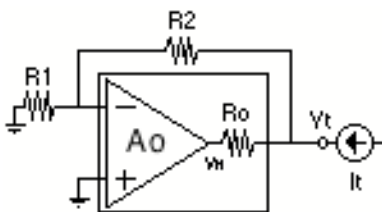
La corrente di segnale che viene iniettata (I_t) va tutta su R_o e sposta il punto V_x , mentre il punto V_o rimane ben fermo.

La reazione riduce l'impedenza di uscita

Effetti della reazione

Effetto della reazione sull'impedenza di uscita

La stessa valutazione puo' essere fatta con guadagno finito dell'amplificatore (A_o).



Si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{0 - (-V_x/A_o)}{R_1} = \frac{(-V_x/A_o) - V_t}{R_2} \\ \frac{V_x - V_t}{R_o} = \frac{(-V_x/A_o) - V_t}{R_2} + I_t \end{cases}$$

$$V_t = I_t \cdot \frac{1}{A_o} \cdot \frac{R_o \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + \frac{R_1 + R_2 + R_o}{A_o}}$$

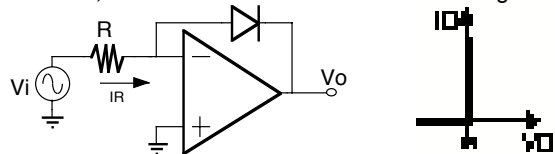
$$R_{out} = \frac{V_t}{I_t} = \frac{1}{A_o} \cdot \frac{R_o \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + \frac{R_1 + R_2 + R_o}{A_o}}$$

**Maggiore e' il guadagno (A_o)
minore l'impedenza di uscita (R_{out})**

Esercizio (I)

Testo

Valutare $V_o(V_i)$ per $V_i = 1V \cdot \sin(2\pi \cdot f_{in} \cdot t)$. Si consideri il diodo ideale, cioe' con la caratteristica mostrata in figura.



Soluzione

Si studia il comportamento del circuito per $V_i > 0$ e per $V_i < 0$.

- Per $V_i > 0$, I_R tende ad essere positiva nel verso della freccia. Il diodo e' in grado di accettare I_R e pertanto l'anello di reazione attorno all'amplificatore operazionale.

Il nodo invertente di ingresso dell'amplificatore e' a massa.

La corrente I_R e' quindi data da:

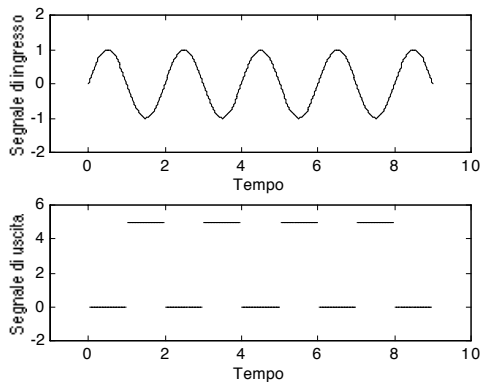
$$I_R = \frac{V_i}{R}$$

La tensione sul diodo e' nulla e quindi per $V_i > 0$ si ha che:

$$V_o = 0$$

Esercizio (II)

- Per $V_i < 0$, la corrente I_R avrebbe un valore negativo. Tale corrente però non può essere accettata dal diodo, che è quindi interdetto. Per cui $I_R = 0$.
In aggiunta, la reazione attorno all'operazionale è aperta, e non vale il principio di massa virtuale.
Essendo $I_R = 0$, non cade tensione sulla resistenza e quindi:
 $V^- = V_i$
La tensione di uscita V_o si porta quindi a:
 $V_o = A \cdot (V^+ - V^-) = -A \cdot V^-$
Per $A = \infty$, V_o tenderebbe a $-\infty$. In realtà si blocca a V_{sat-} .
Per $V_{sat-} = -5V$ si ha il seguente grafico:



V - 73

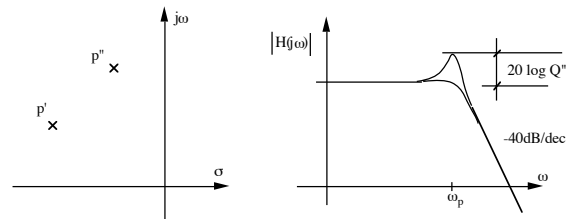
October 27, 2007

Filtri analogici

Tipi di risposta di un filtro analogico

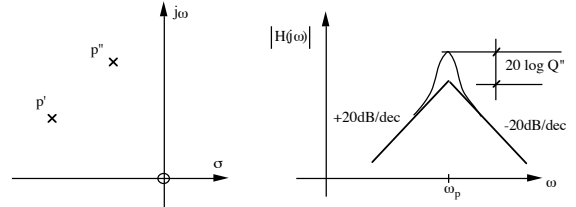
- Passabasso

$$H(s) = K \frac{\omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} = \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



- Passabanda

$$H(s) = K \frac{\omega_z \cdot s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} = \frac{a_1 \cdot s}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



V - 74

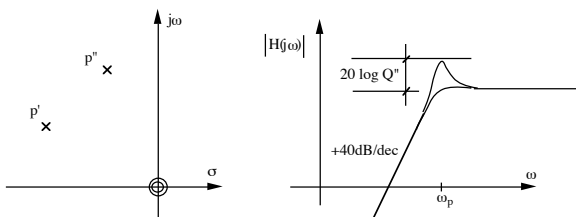
October 27, 2007

Filtri analogici

Tipi di risposta di un filtro analogico

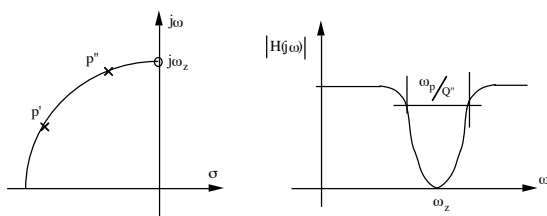
- Passa-alto

$$H(s) = K \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} = \frac{a_2 \cdot s^2}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



- Notch

$$H(s) = K \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} = \frac{a_2 \cdot s^2 + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$



V - 75

October 27, 2007

Filtri analogici

- La risposta in frequenza di un filtro analogico si può scrivere:

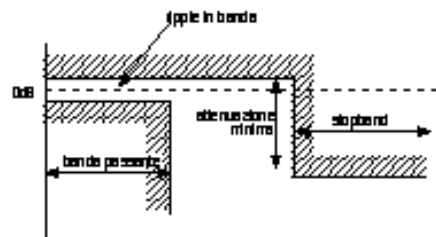
$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \dots}$$

$$= \frac{(s + \tau_{z1}) \cdot (s + \tau_{z2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{z1}/Q_{z1} + \omega_{z1}^2) \cdot \dots}{(s + \tau_{p1}) \cdot (s + \tau_{p2}) \cdot \dots \cdot (s^2 + s \cdot \omega_{p1}/Q_{p1} + \omega_{p1}^2) \cdot \dots}$$

- Cioè si può scomporre in blocchi del primo e del secondo ordine da utilizzarsi in cascata

- Il numero dei poli corrisponde all'ordine del filtro

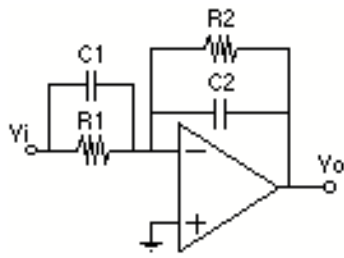
- Il filtro viene definito con una maschera della risposta in frequenza (in ampiezza o fase). Ad esempio in ampiezza per un passabasso si può avere:



V - 76

October 27, 2007

Cella del primo ordine

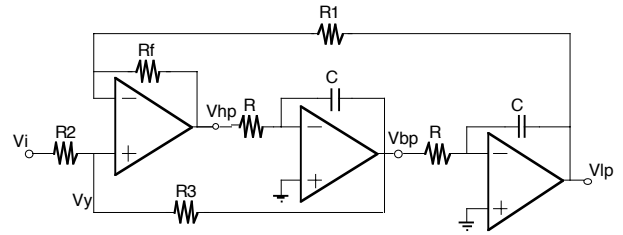


$$H(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + s \cdot R_1 \cdot C_1}{1 + s \cdot R_2 \cdot C_2}$$

V - 77

October 27, 2007

Cella biquadratica di KHN (Kerwin-Huelsman-Newcomb)



$$\begin{cases} \frac{V_i - V_y}{R_2} = \frac{V_y - V_{bp}}{R_3} \\ \frac{V_{lp} - V_y}{R_1} = \frac{V_y - V_{hp}}{R_f} \\ V_{bp} = -\frac{V_{hp}}{s \cdot R \cdot C} \\ V_{lp} = -\frac{V_{bp}}{s \cdot R \cdot C} \end{cases}$$

$$H_{lp} = \frac{R_3 \cdot (R_f + R_1)}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

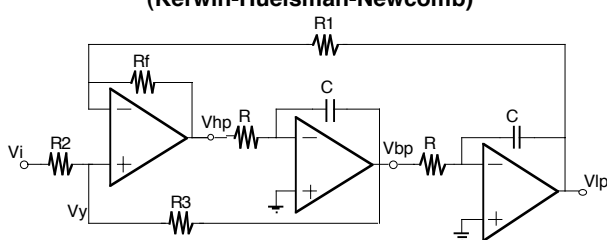
$$H_{bp} = \frac{C \cdot R \cdot R_3 \cdot (R_f + R_1) \cdot s}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

$$H_{hp} = \frac{C^2 \cdot R^2 \cdot R_3 \cdot (R_f + R_1) \cdot s^2}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

V - 78

October 27, 2007

Cella biquadratica di KHN (Kerwin-Huelsman-Newcomb)



$$H_{lp} = \frac{R_3 \cdot (R_f + R_1)}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

$$H_{bp} = \frac{C \cdot R \cdot R_3 \cdot (R_f + R_1) \cdot s}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

$$H_{hp} = \frac{C^2 \cdot R^2 \cdot R_3 \cdot (R_f + R_1) \cdot s^2}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3) \cdot s^2 + C \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_f + R_1) \cdot s + R_f \cdot (R_2 + R_3)}$$

- E' possibile ricavare il valore della pulsazione dei poli (ω_0) e del fattore di qualita' (Q)

$$s^2 + s \cdot \frac{R_2 \cdot (R_f + R_1)}{C \cdot R \cdot R_1 \cdot (R_2 + R_3)} + \frac{R_f}{C^2 \cdot R^2 \cdot R_1} = s^2 + s \cdot \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$

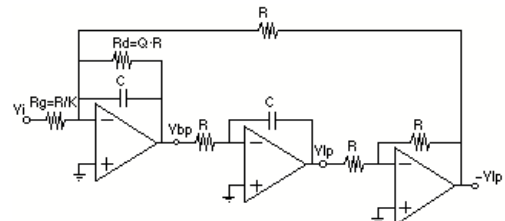
$$\omega_0 = \frac{1}{C \cdot R} \cdot \sqrt{\frac{R_f}{R_1}}$$

$$Q = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) \cdot \frac{\sqrt{R_f \cdot R_1}}{R_f + R_1}$$

V - 79

October 27, 2007

Filtro di Tow-Thomas



$$\begin{cases} \frac{V_i}{R_g} = -s \cdot C \cdot V_{bp} - \frac{V_{bp}}{R_d} + \frac{V_{lp}}{R} \\ V_{lp} = -\frac{V_{bp}}{s \cdot R \cdot C} \end{cases}$$

$$\frac{V_{lp}}{V_i} = \frac{R \cdot R_d}{R_d \cdot R_g + C \cdot R^2 \cdot R_g \cdot s + C^2 \cdot R^2 \cdot R_g \cdot R_d \cdot s^2}$$

$$\frac{V_{bp}}{V_i} = -\frac{C \cdot R^2 \cdot R_d \cdot s}{R_d \cdot R_g + C \cdot R^2 \cdot R_g \cdot s + C^2 \cdot R^2 \cdot R_g \cdot R_d \cdot s^2}$$

- La posizione degli zeri (numeratore) dipende dal punto di ingresso e dal punto di uscita
- La posizione dei poli (denominatore) dipende dall'anello di reazione
- E' possibile ricavare il valore della pulsazione dei poli (ω_0) e del fattore di qualita' (Q)

$$s^2 + s \cdot \frac{1}{C \cdot R_d} + \frac{1}{C^2 \cdot R^2} = s^2 + s \cdot \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$

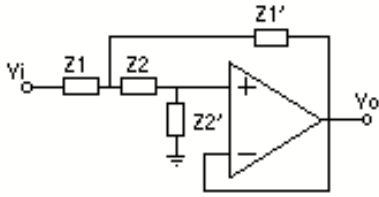
$$\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$Q = \omega_0 \cdot C \cdot R_d = \frac{R_d}{R}$$

V - 80

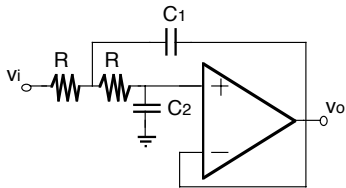
October 27, 2007

Filtro di Sallen&Key



$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_1' \cdot Z_2'}{(Z_1 + Z_2 + Z_2') \cdot Z_1' + Z_1 \cdot Z_2}$$

- L'amplificatore e' configurato a buffer; cio' comporta che deve avere in ingresso lo stesso swing che ha in uscita
- Per avere una risposta di tipo passabasso:



$$Z_1 = Z_2 = R$$

$$Z_1' = \frac{1}{s C_1}$$

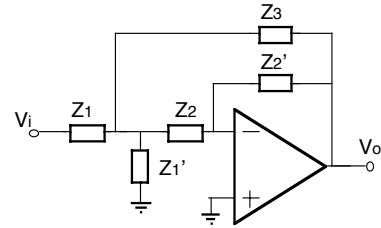
$$Z_2' = \frac{1}{s C_2}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot R \cdot C_2 \cdot s + R^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s^2}$$

Si ha una risposta massimamente piatta in banda ($Q = \sqrt{2}/2$)

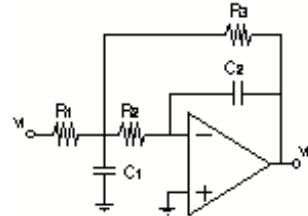
$$C_1 = 2 \cdot C_2 \quad f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} \cdot R \cdot C}$$

Filtro di Rauch



$$H(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = - \frac{Z_1}{Z_3 + Z_2'} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_1' + Z_2 + Z_3} \right)$$

Per avere una risposta di tipo passabasso:



$$Z_1 = R_1$$

$$Z_2 = R_2$$

$$Z_3 = R_3$$

$$Z_1' = 1/s \cdot C_1$$

$$Z_2' = 1/s \cdot C_2$$

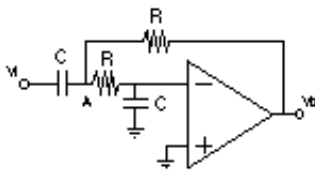
$$H(s) = - \frac{R_1}{R_3 + s \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}) + s^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}$$

Si ha una risposta massimamente piatta in banda ($Q = \sqrt{2}/2$)

$$R_1 = R_3 = 2 \cdot R_2 = 2R \quad C_1 = 4 \cdot C_2 = 4C \quad f_0 = 1/(4\pi \sqrt{2} RC)$$

- All'ingresso dell'amplificatore operazionale non c'e' swing di segnale

Esercizio (I)



- Supponendo l'operazionale ideale, si determini la funzione di trasferimento $v_o/v_i(s)$.
- Si valuti la funzione di trasferimento $v_o/v_i(s)$ per un guadagno finito dell'operazionale $A = 100$
- Si tracci il diagramma di Bode del modulo della f. d. t. $v_o/v_i(s)$ nei due casi.

a)

- L'amplificatore operazionale e' ideale ed e' reazionato negativamente; pertanto vale il principio della massa virtuale e si ha $V^+ = V^- = 0$ V.
- Attraverso il condensatore C connesso tra i morsetti di ingresso dell'operazionale non fluisce alcuna corrente, in quanto ai capi del condensatore vi e' sempre una differenza di potenziale nulla.
- L'impedenza di ingresso dell'operazionale ideale e' infinita
=> anche la resistenza R (tra il punto A e il morsetto invertente dell'operazionale) e' attraversata da corrente nulla.
=> $V_A = 0$ V

Esercizio (II)

- Il nodo A si comporta a tutti gli effetti come una massa virtuale.
- La tensione v_o risulta:
- Pertanto la f. d. t. ingresso-uscita e':

$$\frac{v_o}{v_i(s)} = -s \cdot C \cdot R = -s \cdot \tau$$

dove si e' posto $\tau = C \cdot R$.

Quella trovata e' la funzione di trasferimento che caratterizza un derivatore ideale.

- Per un guadagno finito dell'amplificatore operazionale va considerata la relazione $v_o = A(v^+ - v^-)$, da cui si ottiene:

$$v^- = -v_o/A$$

- Poiche' l'impedenza di ingresso dell'operazionale e' infinita, si può scrivere il seguente bilancio di corrente:

$$\frac{V_A - V^-}{R} = v^- \cdot s \cdot C$$

- Da cui si ricava

$$V_A = - (v_o/A) \cdot (1 + s \cdot C \cdot R)$$

- Tenendo conto di questa relazione e risolvendo l'equazione di bilancio della corrente al nodo A:

$$(v_i - V_A) \cdot s \cdot C = \frac{V_A - v_o}{R} + \frac{V_A - V^-}{R}$$

si trova la seguente funzione di trasferimento:

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{A^2 \cdot C \cdot R \cdot s}{s^2 \cdot A \cdot C^2 \cdot R^2 + 3 \cdot A \cdot C \cdot R \cdot s + A \cdot (A+1)}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{A \cdot \tau \cdot s}{s^2 \cdot \tau^2 + 3 \cdot \tau \cdot s + (A+1)}$$

Esercizio (III)

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{A \cdot s / \tau}{s^2 + 3 \cdot \frac{s}{\tau} + \frac{A+1}{\tau^2}}$$

dove si è posto $\tau = R \cdot C$.

- Si verifica che per $A \rightarrow \infty$, si trova il risultato del punto a).
- La funzione di trasferimento ora ottenuta presenta uno zero nell'origine e due poli p_1 e p_2 .

La posizione dei due poli si ottiene trovando le radici del denominatore:

$$s^2 + 3 \cdot \frac{s}{\tau} + \frac{A+1}{\tau^2} = 0$$

$$s = \frac{-3/\tau \pm \sqrt{(3/\tau)^2 - 4 \cdot \frac{A+1}{\tau^2}}}{2}$$

$$s = \frac{-3/\tau \pm \sqrt{5 - 4 \cdot A}}{2}$$

I poli per $A > 5/4$ sono complessi coniugati, poiché il termine sotto radice diventa negativo.

Il denominatore si può allora scrivere:

$$s^2 + 3 \cdot \frac{s}{\tau} + \frac{A+1}{\tau^2} = s^2 + \frac{\omega_o}{Q} \cdot s + \omega_o^2 = 0$$

La frequenza caratteristica della coppia di poli e il fattore di qualità Q sono dati da:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{\sqrt{A+1}}{2\pi \cdot \tau} \quad Q = \omega_o \cdot \frac{\tau}{3} = \frac{\sqrt{A+1}}{3}$$

Esercizio (IV)

- c) I diagrammi di Bode del modulo delle f. d. t. ottenute nel caso ideale ($A \rightarrow \infty$, linea tratteggiata) e in un caso reale ($A = 100$, linea continua) sono riportati nel grafico seguente:

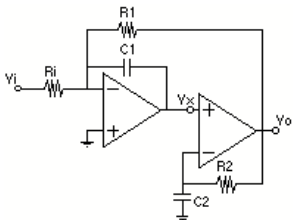


Il diagramma di Bode del modulo della f. d. t. considerata presenta, rispetto al diagramma approssimato, uno scostamento nella posizione dei poli il cui valore in dB è dato da:

$$20 \log_{10}(Q) = 10.5 \text{ dB}$$

Esercizio (I)

Testo



$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$

$C_1 = 100 \text{ nF}$

$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$

$C_2 = 10 \text{ nF}$

$R_i = 10 \text{ k}\Omega$

Amplificatore operazionale ideale

- 1- Si calcoli il guadagno v_o/v_i
- 2- Si calcoli il guadagno v_x/v_i
- 3- Si tracci il diagramma di Bode del modulo di v_o/v_i

1/2 -

Si può scrivere un sistema di equazioni di Kirchhoff per le correnti ai nodi di massa virtuale

$$\begin{cases} v_x = -\frac{1}{s \cdot C_1} \cdot \left(\frac{v_i}{R_i} + \frac{v_o}{R_1} \right) \\ v_o = v_x \cdot (1 + s \cdot R_2 \cdot C_2) \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{R_1 \cdot (1 + s \cdot R_2 \cdot C_2)}{R_i \cdot (1 + s \cdot (R_2 \cdot C_2 + R_1 \cdot C_1))}$$

$$\frac{v_x}{v_i} = - \frac{R_1}{R_i \cdot (1 + s \cdot (R_2 \cdot C_2 + R_1 \cdot C_1))}$$

Esercizio (II)

3 -

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{R_1 \cdot (1 + s \cdot R_2 \cdot C_2)}{R_i \cdot (1 + s \cdot (R_2 \cdot C_2 + R_1 \cdot C_1))}$$

- Ci sono un polo ed uno zero

La pulsazione del polo è data da:

$$\omega_p = \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot C_2} = 10 \text{ Mrad/sec}$$

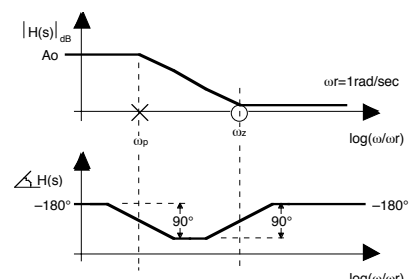
La pulsazione dello zero è data da:

$$\omega_z = \frac{1}{R_2 \cdot C_2} = 10 \text{ krad/sec}$$

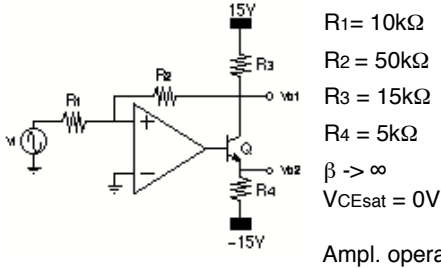
Il guadagno in continua è dato da:

$$A_o = \frac{R_1}{R_i} = 10 \text{ (= 20dB)}$$

- Il diagramma di Bode di modulo e fase sono i seguenti:



Esercizio (I)



$$R_1 = 10k\Omega$$

$$R_2 = 50k\Omega$$

$$R_3 = 15k\Omega$$

$$R_4 = 5k\Omega$$

$$\beta \rightarrow \infty$$

$$V_{CEsat} = 0V$$

Ampl. operazionale ideale

- 1- Si calcoli il punto di lavoro
- 2- Si calcoli il guadagno v_{o1}/v_i
- 3- Si calcoli il guadagno v_{o2}/v_i
- 4- Si valuti per che valori di V_i in continua la reazione si apre

1-

- Per calcolare il punto di lavoro si pone $V_i = 0$.
- Si supponga che la reazione sia chiusa.
- Allora vale il principio di massa virtuale ($v^- = 0V$) e su R_1 non passa corrente.
- Ne consegue che anche su R_2 non passa corrente
- v_{o1} in continua si porta a $0V$.
- La corrente su R_3 e' data da

$$I_{R3} = \frac{15V - 0V}{R_3} = 1mA$$

- Tutta questa corrente arriva su R_4 ($\beta \rightarrow \infty$) e pertanto si puo' ricavare:

$$v_{o2} = -15V + I_{R3} \cdot R_4 = -10V$$

Esercizio (II)

- L'uscita dell'amplificatore che e' la base del transistor si porta a $-9.3V$
- Il transistor opera correttamente ($V_{CE} = 10V$) e quindi era corretta l'ipotesi di reazione chiusa.

2-

- Per il calcolo del guadagno si puo' ricorrere al circuito equivalente di piccolo segnale.
- Tuttavia, si puo' osservare che l'amplificatore operazionale e' ideale e pertanto vale anche per piccolo segnale il principio di massa virtuale
- Allora PER IL SEGNALE si puo' scrivere l'equazione di bilancio delle correnti al nodo di massa virtuale

$$\frac{v_i - 0}{R_1} = \frac{0 - v_{o1}}{R_2}$$

- Da cui si ricava:

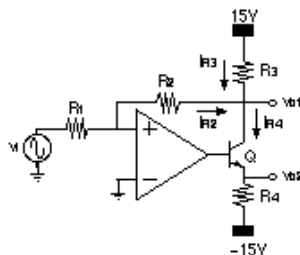
$$\frac{v_{o1}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} = -5$$

Esercizio (III)

3-

Per ricavare il guadagno v_{o2}/v_i si puo' considerare il bilancio di correnti al nodo v_{o1} :

$$i_{r2} + i_{r3} = i_{r4}$$



$$\text{ove: } i_{r2} = -v_{o1}/R_2, \text{ e } i_{r3} = -v_{o1}/R_3.$$

Da cio' si ricava:

$$i_{r4} = -v_{o1} \cdot (1/R_2 + 1/R_3)$$

Tale corrente (i_{r4}) arriva tutta su R_4 ($\beta = \infty$) e quindi si ottiene:

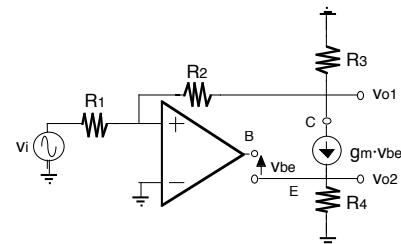
$$v_{o2} = i_{r4} \cdot R_4 = -v_{o1} \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot R_4$$

$$v_{o2} = v_i \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 \cdot R_3}$$

$$\frac{v_{o2}}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_3)}{R_2 \cdot R_3} = 2.166$$

Esercizio (IV)

In alternativa si puo' considerare il circuito equivalente per piccoli segnali. Da notare che il circuito equivalente per piccoli segnale di un amplificatore operazionale che opera in regione lineare e' un amplificatore di tensione con guadagno pari a quello dell'amplificatore operazionale usato.



I valori dei componenti sono:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{1mA}{25mV} = 40mA/V$$

$$r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m} = \frac{\infty}{40mA/V} = \infty$$

per cui r_{π} non e' stata disegnata nel circuito a piccolo segnale

4-

Per V_i positivi, su R_1 inizia a passare una corrente in continua e pertanto V_{o1} tende ad abbassarsi.

Abbassandosi V_{o1} , la corrente su R_3 tende a crescere.

Tale corrente scorre tutta su R_4 e pertanto V_{o2} tende a salire.

La tensione V_{CE} del transistor tende a calare.

Esercizio (V)

La reazione e' chiusa finche' il transistor non entra in saturazione ($V_{CE} < V_{CEsat}$)

Numericamente si ottiene:

$$V_{o1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_i$$

$$I_{R3} = \frac{15V - V_{o1}}{R_3}$$

$$I_{R2} = \frac{V_i}{R_1}$$

$$I_{R4} = I_{R3} + I_{R2}$$

$$V_{o2} = -15V + I_{R4} \cdot R_4 = -15V + \left(\frac{15V - V_{o1}}{R_3} + \frac{V_i}{R_1} \right) \cdot R_4$$

$$V_{o2} = -15V + \left(\frac{15V + \frac{R_2}{R_1} \cdot V_i}{R_3} + \frac{V_i}{R_1} \right) \cdot R_4$$

Quindi bisogna trovare

$$V_{o2} = V_{o1}$$

$$-15V + \left(\frac{15V + \frac{R_2}{R_1} \cdot V_i}{R_3} + \frac{V_i}{R_1} \right) \cdot R_4 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot V_i$$

Ne risulta che:

$$V_i = -15V \cdot \frac{R_1 \cdot (R_4 - R_3)}{R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4} = 1.39V$$

Per V_i negativi, V_{o1} tende a salire e di conseguenza la corrente su R_3 tende a scendere.

Esercizio (VI)

La reazione e' chiusa finche' una certa corrente attraversa il transistor, e cioe' finche' la corrente su R_3 e' maggiore di quella su R_2 .

$$I_{R2} = \frac{-V_i}{R_1}$$

$$I_{R3} = \frac{15V - V_{o1}}{R_3} = \frac{15V + \frac{R_2}{R_1} \cdot V_i}{R_3}$$

Il punto di passaggio si ha per

$$I_{R3} = I_{R2}$$

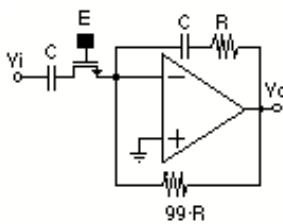
$$-\frac{V_i}{R_1} = \frac{15V + \frac{R_2}{R_1} \cdot V_i}{R_3}$$

Cioe' per:

$$V_i = -15V \cdot \frac{R_1}{R_2 + R_3} = -2.3V$$

Quindi il circuito opera con reazione attiva per
 $-2.3V < V_i < 1.39V$

Esercizio



$$R = 1k\Omega$$

$$C = 10pF$$

$$R_A = 10k\Omega$$

$$\mu \cdot C_{ox} = 10 \mu A/V^2$$

$$\left(\frac{W}{L} \right)_M = \frac{100 \mu m}{1 \mu m}$$

$$V_{TH} = 1V$$

Nel circuito in figura, l'amplificatore e' ideale.

- 1- Si calcoli la funzione di trasferimento $v_o/v_i(s)$ per $E=2V$
- 2- Si traccino i relativi diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $v_o/v_i(s)$
- 3- Si determini il valore di E per cui i poli della funzione di trasferimento sono reali e coincidenti.

Stabilita' dei sistemi reazionati

- Criterio generale

Data una struttura lineare,

- 1- Si calcola il Guadagno di Anello (G_{loop})

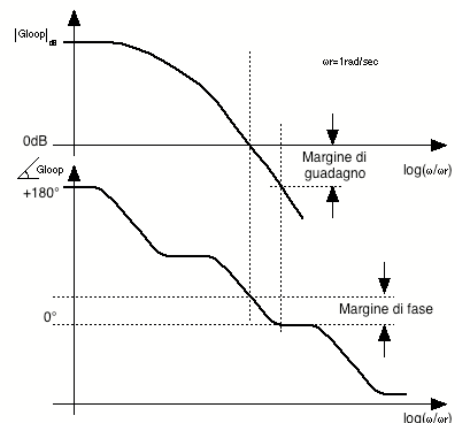
(Ricordarsi di ripristinare le impedenze dove si e' aperto l'anello di reazione)

- 2- Il sistema e' stabile se alla frequenza per cui la fase di G_{loop} e' uguale a -180° , il modulo di G_{loop} e' < 1

- Prima deduzione:

Un sistema con al massimo due poli nel guadagno d'anello (cioe' con sfasamento sempre minore in modulo a -180°) e' sempre stabile

- Margine di Guadagno e Margine di Fase



Stabilita' dei sistemi reazionati

- Il margine di fase ottimo alla frequenza di guadagno unitario (per ridurre sovraelongazioni alla risposta al gradino) e' 45°

Cio' corrisponde ad avere il secondo polo alla frequenza di $G_{loop}=0dB$

- Criterio di Bode (semplice)

i poli e gli zeri del G_{loop} sono nel semipiano destro

i poli e gli zeri del G_{loop} sono non interagenti (distanziati di una decade)

1- Si calcoli il Guadagno di Anello (G_{loop})

2- Si disegni il diagramma di Bode dell'ampiezza del guadagno di anello

3- Se il diagramma di Bode dell'ampiezza attraversa l'asse di 0dB con una pendenza maggiore o uguale a -20dB/dec, allora il sistema reazionato e' stabile

Stabilita' dei sistemi reazionati

Con la presenza di un certo numero di poli, lo sfasamento ottimo alla frequenza di guadagno unitario (per ridurre sovraelongazioni alla risposta al gradino) e' 45°

Cio' corrisponde ad avere il secondo polo alla frequenza di guadagno unitario

- Stabilizzazione di un sistema

Riduzione del guadagno

Pb.: Imprecisione a bassa frequenza

Polo dominante

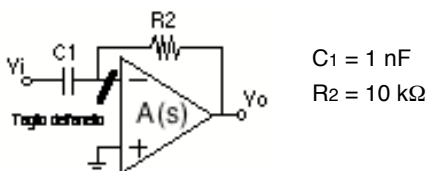
Pb.: Riduzione della banda

Rete correttiva

Pb.: Difficile implementazione

Stabilita' dei sistemi reazionati

Esempio: circuito derivatore (I)

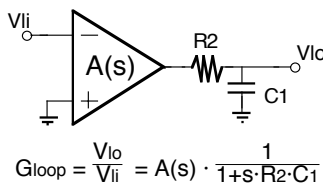


Si assume:

$$A(s) = \frac{A_o}{(1+s\tau_1) \cdot (1+s\tau_2)}$$

Calcolo del G_{loop}

Avendo tagliato l'anello all'ingresso dell'amplificatore operazionale l'impedenza da ripristinare e' infinita e quindi nulla si deve aggiungere



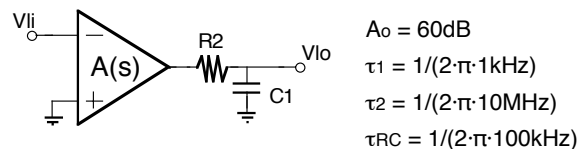
Sostituendo $A(s)$ si ottiene:

$$G_{loop} = \frac{1}{1+s \cdot R_2 \cdot C_1} \cdot \frac{A_o}{(1+s\tau_1) \cdot (1+s\tau_2)}$$

Ci sono tre poli e quindi la struttura potrebbe essere instabile.

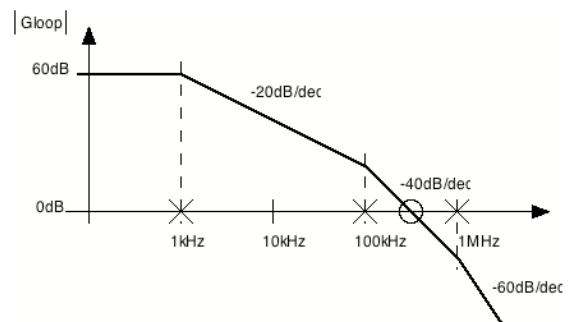
Stabilita' dei sistemi reazionati

Esempio: circuito derivatore (II)



$$G_{loop} = \frac{1}{1+s \cdot R_2 \cdot C_1} \cdot \frac{A_o}{(1+s\tau_1) \cdot (1+s\tau_2)}$$

- Diagramma di Bode del modulo del G_{loop}



Con i parametri in esame il modulo del G_{loop} attraversa l'asse di 0dB con una pendenza di -40dB/dec

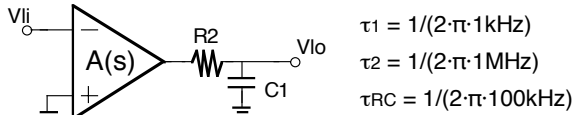
=> Il circuito retroazionato non e' necessariamente stabile

Stabilita' dei sistemi reazionati

Esempio: circuito derivatore (III)

Per stabilizzare il circuito di prima si puo' ridurre il guadagno

=> Ridurre il guadagno fa ridurre la precisione in bassa frequenza (Effetti del guadagno finito)



$$G_{loop} = \frac{1}{1+s \cdot R_2 \cdot C_1} \cdot \frac{A_o}{(1+s \cdot \tau_1) \cdot (1+s \cdot \tau_2)}$$

Mantenendo la posizione data dei poli, qual e' il massimo guadagno dell'amplificatore per avere un sistema retroazionato stabile ?

- Per avere un sistema stabile (con 45° di margine di fase) si deve avere nel diagramma di Bode del modulo di G_{loop} il secondo polo in coincidenza con l'attraversamento della linea di 0dB.

- Si fissa allora:

$$G_{loop}(100\text{kHz}) = 0\text{dB}$$

- Dal momento che per frequenze minori il G_{loop} scende a -20dB/dec fino al primo polo che e' a 1kHz (1 decade).

V - 101

October 27, 2007

Stabilita' dei sistemi reazionati

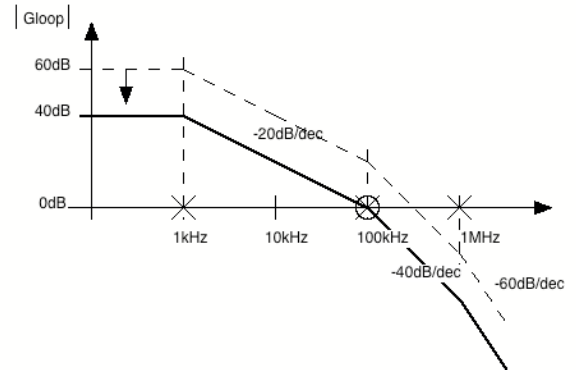
Esempio: circuito derivatore (IV)

- Si ottiene quindi:

$$G_{loop}(1\text{kHz}) = 40\text{dB}$$

Per cui il guadagno massimo per avere un sistema retroazionato stabile e' 40dB

Il relativo diagramma di Bode risulta:

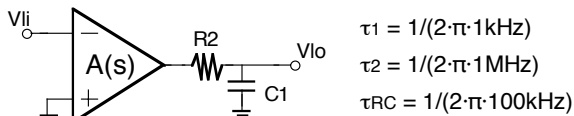


V - 102

October 27, 2007

Stabilita' di sistemi reazionati

Esempio: circuito derivatore (V)

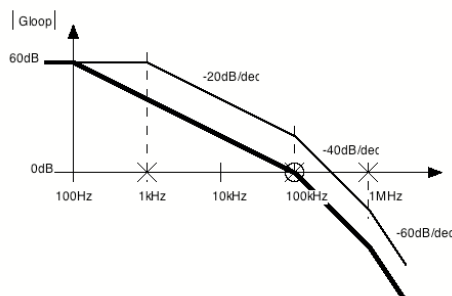


$$G_{loop} = \frac{1}{1+s \cdot R_2 \cdot C_1} \cdot \frac{A_o}{(1+s \cdot \tau_1) \cdot (1+s \cdot \tau_2)}$$

Polo dominante

- Un sistema instabile si puo' stabilizzare anticipando la posizione del primo polo che diventa il polo dominante.
- Talvolta non e' possibile utilizzare questo metodo in quanto potrebbe richiedere di operare sulla struttura dell'amplificatore.

Il polo originalmente a 1kHz potrebbe essere spostato come mostrato in figura.

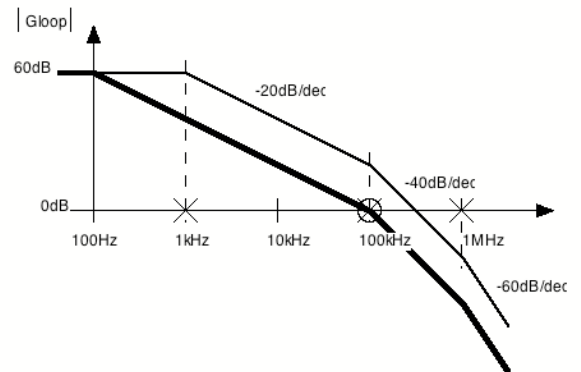


V - 103

October 27, 2007

Stabilita' di sistemi reazionati

Esempio: circuito derivatore (VI)



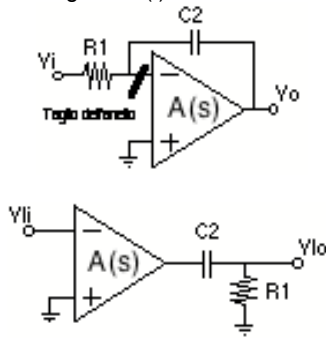
- La nuova posizione del polo si valuta come segue:
 - Si piazza il punto a 0dB a 100kHz (posizione del 2° polo)
 - La posizione del primo polo sara' a:
- $$100\text{kHz} \cdot \frac{1}{1000} (-60\text{dB}) = 100\text{Hz}$$
- La banda del sistema viene ridotta

V - 104

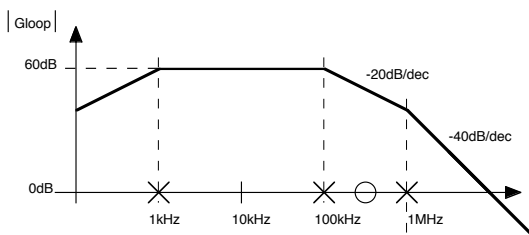
October 27, 2007

Stabilita' di sistemi reazionati

Esempio: circuito integratore (I)

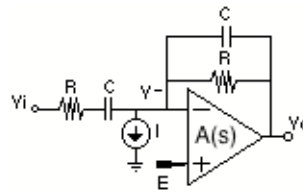


$$G_{loop}(s) = A(s) \cdot \frac{s \cdot R_1 \cdot C_2}{1 + s \cdot R_1 \cdot C_2}$$



Nel Gloop dell' integratore e' presente uno zero nell'origine che tende a stabilizzare il sistema.

Esercizio (I)



$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 3.8 \text{ nF}$$

$$E = 1 \text{ V}$$

$$I = 1 \text{ mA}$$

1. Si determini il punto di lavoro in continua (ossia si trovino V_o e V^- per $V_{in}=0$) nel caso in cui l'amplificatore operazionale A sia ideale. Si calcoli la funzione di trasferimento v_o/v_i e se ne traccino i diagrammi di Bode
2. Nel caso in cui la funzione di trasferimento dell' amplificatore operazionale sia data da: $A(s)=A_o/(1+s\tau)$, $A_o=10000$, $\tau=1\text{ms}$, si calcoli la variazione del punto di lavoro (variazioni di V_o e V^-) rispetto al caso precedente.
3. Si dica se, nelle condizioni del punto 2, il sistema e' stabile.

1. Essendo i termini forzanti I ed E in continua, il punto di lavoro va calcolato considerando i condensatori come circuiti aperti. Poiche' l'amplificatore operazionale e' ideale ed e' reazionato negativamente, vale il principio del corto circuito virtuale ai morsetti di ingresso e si ha:

$$V^-_1 = V^+ = E = 1 \text{ V}$$

Esercizio (II)

La corrente I scorre interamente nella resistenza R posta in reazione, e per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha:

$$V_{o1} = I \cdot R + V^+ = I \cdot R + E = 2 \text{ V}$$

La funzione di trasferimento risulta essere:

$$\frac{v_o}{v_i} = - \frac{\frac{R}{1+s \cdot R \cdot C}}{\frac{1}{R+s \cdot C}} = - \frac{s \cdot R \cdot C}{(1+s \cdot R \cdot C)^2}$$

2. Il legame ingresso-uscita dell'amplificatore operazionale in questo caso e':

$$V_{o2} = A_o \cdot (V^+ - V^-_2) = A_o \cdot (E - V^-_2)$$

Siccome la corrente I scorre interamente attraverso la resistenza in reazione R si ha:

$$V_{o2} - V^-_2 = I \cdot R$$

Da queste relazioni si ottiene:

$$V_{o2} = \frac{A_o}{A_o+1} \cdot (E + I \cdot R)$$

$$V^-_2 = V_{o2} - I \cdot R$$

A questo punto possono essere calcolate le variazioni delle grandezze V^- e V_o rispetto alla situazione proposta nel punto 1 nel seguente modo:

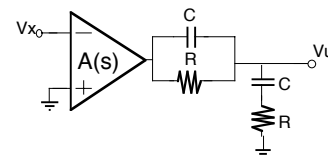
$$\Delta V_o = V_{o2} - V_{o1} = -0.2 \text{ mV}$$

$$\Delta V^- = V^-_2 - V^-_1 = -0.2 \text{ mV}$$

Esercizio (III)

3. Per discutere la stabilita' del sistema occorre studiare il circuito per piccolo segnale e, quindi, spegnere i generatori indipendenti: il generatore di segnale v_{in} e la batteria E vanno cortocircuitati, mentre il generatore di corrente I va sostituito con un circuito aperto.

Per calcolare il guadagno di anello G_{loop} si puo' interrompere l'anello in corrispondenza del morsetto di ingresso negativo dell'operazionale ed applicare un generatore di tensione di segnale di sonda V_x , ottenendo il seguente circuito:



Il guadagno di anello (G_{loop}) risulta essere:

$$G_{loop} = \frac{V_u}{V_x} = -A(s) \cdot \frac{\frac{1+s \cdot R \cdot C}{s \cdot C}}{\frac{1+s \cdot R \cdot C}{s \cdot C} + \frac{R}{1+s \cdot R \cdot C}} = - \frac{A_o}{1+s \cdot \tau} \cdot \frac{(1+s \cdot \tau')^2}{s^2 \cdot \tau'^2 + 3 \cdot s \cdot \tau' + 1}$$

dove si e' posto $RC = \tau'$. Le radici del denominatore sono reali e distinte: $s_1 = -0.38/\tau'$, $s_2 = -2.61/\tau'$. Il guadagno di anello si puo' riscrivere nel seguente modo:

$$G_{loop} = -A_o \cdot \frac{(1+s \cdot \tau')^2}{(1+s \cdot \tau) \cdot (1+s \cdot \tau_1) \cdot (1+s \cdot \tau_2)}$$

dove $\tau_1 = \tau'/0.38$, $\tau_2 = \tau'/2.61$.

Esercizio (IV)

Il diagramma di Bode approssimato del modulo di Gloop e' il seguente:

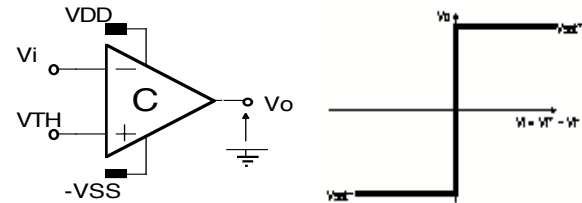
Siccome si ha l'attraversamento dell'asse a 0 dB con una pendenza pari a -20 dB/decade, il sistema reazionato risulta stabile.

Il comparatore

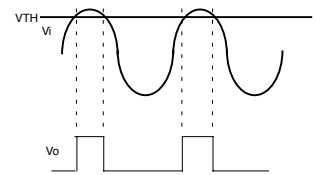
Una possibile applicazione degli amplificatori operazionali ad anello aperto.

Un segnale viene applicato ad un ingresso, mentre l'altro ingresso e' applicato ad una tensione fissa V_{TH} (tensione di soglia o di scatto)

L'amplificatore ha un guadagno che tende ad infinito.



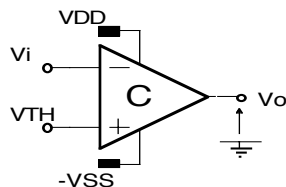
- L'uscita quindi si porta sempre ad una delle due tensioni di saturazione (positiva o negativa) a seconda che il segnale sia maggiore o minore della tensione di soglia



Viene utilizzato per verificare se un certo segnale (magari proveniente da un sensore) e' presente su una certa linea.

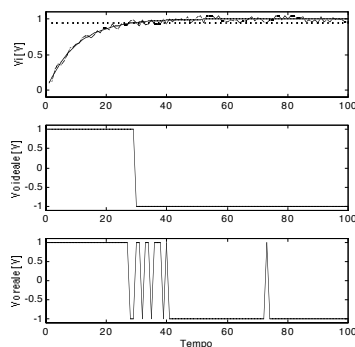
Comparatore

Problema:



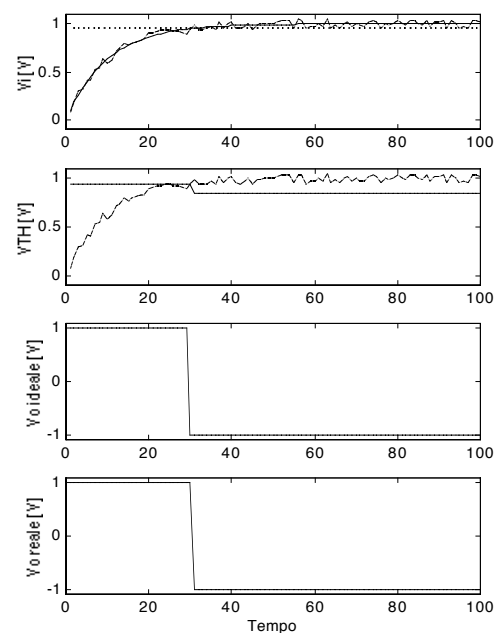
Se sul segnale e' sovrapposto un rumore,

- tale rumore rende incerto il punto di attraversamento della soglia rilevato dallo scatto del comparatore
- nel caso di un segnale di poco superiore o inferiore alla soglia, il rumore causa un' incertezza sul dato in uscita dovuto a continui rimbalzi



Comparatore con isteresi

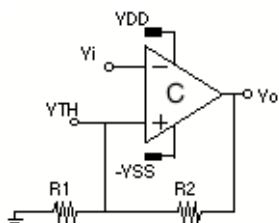
Il concetto base del comparatore con isteresi e' di aggiornare la soglia non appena il comparatore e' scattato in modo che un piccolo disturbo sia ininfluenza.



Comparatore con isteresi

- Implementazione

Amplificatore con
reazione positiva

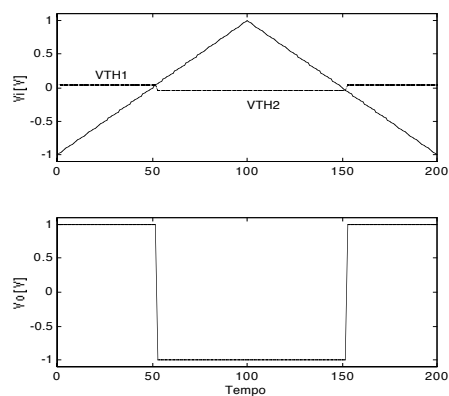


La soglia dipende dall'uscita:

$$V_o = V_{sat+} \Rightarrow V_{TH1} = V_{sat+} \cdot \frac{R1}{R1+R2}$$

$$V_o = V_{sat-} \Rightarrow V_{TH2} = V_{sat-} \cdot \frac{R1}{R1+R2}$$

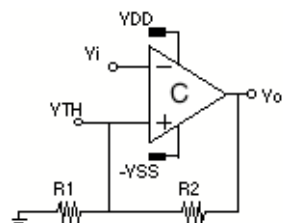
- Risposta alla rampa



Comparatore con isteresi

- Implementazione

Amplificatore con
reazione positiva



- Relazione ingresso-uscita

